Modul F

Potentialfält

Föreläsning F

Ramgard avsnitt 3.2.

F.1 Potentialfält

I första videoklipp utreda vi vad man kan säga om arbetet $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ när kraften $\mathbf{F}$ kan skrivas som gradienten av en funktion ϕ.

Film F.1: `https://youtu.be/x_WQfKybmKO`

Vi ser att arbetet beror endast på kurvans ändpunkter och inte om vägen mellan punkterna. Vi kallar vektorfält som kan skrivas $\mathbf{F} = \nabla\phi$ för *potentialfält* och funktionen ϕ för en *potential*.

I andra videoklipp ser vi att Coulombs lag $\mathbf{F}$ är ett exempel av ett potentialfält. Dessutom kan vi räkna att $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (där $\mathbf{F}$ ges av Coulombs lag). Jag påstår att det var ingen slump. Vi även definierar vad vi menar med en *enkel sammanhängande mängd*. Vi kommer ha nyttja av begreppet i följande avsnitt.

Film F.2: `https://youtu.be/GqG21OwGU-k`

I tredje videoklipp visar vi följande satsen.

Sats F.1. *Anta att vektorfältet $\mathbf{F}\colon \Omega \to \mathbf{R}^3$ är kontinuerligt deriverbart öven en enkel sammanhängande mängd Ω. Då gäller att följande villkor är ekvivalenta.*

(i) $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *är oberoende av vägen Γ tar mellan sina ändpunkterna (där Γ är en styckvis C^1-kurva).*

(ii) Det existerar en funktion $\phi\colon \Omega \to \mathbf{R}$ sådan att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ i Ω.

(iii) $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ *i* Ω.

(iv) $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ *för alla slutna styckvis C^1-kurvor Γ i Ω.*

Bevis. Vi bevisar $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv) \implies (i)$:

Film F.3: `https://youtu.be/uHiYfHeqUzA`

□

Vi går igenom ett exempel av hur man kan beräkna alla potential av ett vektorfält:

Film F.4: `https://youtu.be/07fElTV-51k`

Och sist funderar vi på vad kan gå fel om antagandet att Ω är en enkel sammanhängande mängd inte är uppfylld:

Film F.5: `https://youtu.be/4QFMwDHEgns`

F.2 Vektorfält i $\mathbf{R}^2$

Alla våra diskussioner i den här modulen har varit där vektorfält och potentialer är definierade i delmängder av $\mathbf{R}^3$. Man kan förstås utföra en motsvarade utredning där definitionsmängder är delmängder av $\mathbf{R}^2$. De allra mest är identiskt och sats F.1 gäller utan ändringar, men en fråga kring vad man menar med rotationen av ett vektorfält i $\mathbf{R}^2$ kan uppstå. Det enklaste sätt att handera problemet är att tolka $\mathbf{F}\colon \Omega \to \mathbf{R}^2$ som ett vektorfält definierad i $\Omega \times \mathbf{R}$: Om $\mathbf{F}(x,y) = (F_1(x,y,F_2(x,y)$ för $(x,y) \in \Omega$ kan vi utvidga vektorfältet till $\Omega \times \mathbf{R}$ genom att definierar $\mathbf{F}(x,y,z) = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$. I så fall kan man räkna att rotationen aldrig har någon nollskilda $\mathbf{i}$ eller $\mathbf{j}$ komponenter:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x,y) & F_2(x,y) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Det går därför lika bra att stryka vektorn $\mathbf{k}$ och definiera $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} \right)$ i fallet $\mathbf{F}$ är ett vektorfält i $\mathbf{R}^2$.

Svaret på frågan om en mängd är enkel sammanhängande eller inte kan ser olika ut även där mängderna ser ganska lika ut. Observera till exempel att $\mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ är enkel sammanhängande men $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ inte är det.

Lektion F.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 7.1
- 7.2
- 7.3
- 7.4
- 7.6
- 7.7
- 7.8
- 7.10
- 7.12

Från Ramgard:

- 27
- 32