

# Modul G

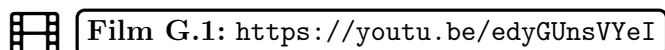
## Kroklinjiga koordinatsystem

### Föreläsning G

Ramgard kapitel 10.

#### G.1 Introduktion

I första videoklipp introducerar vi vad vi menar med ett kroklinjigt koordinatsystem. I grunden är det ett variabelbyte  $\mathbf{r}$  från  $(u_1, u_2, u_3)$ -rummet till  $(x, y, z)$ -rummet:



Koordinatsystemet kallas för *ortogonalt* om

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} = 0 \quad \text{för } i \neq j$$

Vi normaliserar partiella derivator av  $\mathbf{r}$  för att skapa ett *basvektorsystem*  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ :

$$\mathbf{e}_i := \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad \text{där } h_i := \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|$$

Med hjälp av basvektorsystemet kan man skriva ett vektorfält  $\mathbf{A}$  i  $(u_1, u_2, u_3)$ -koordinater:

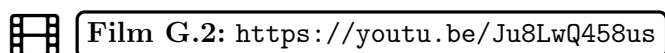
$$\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^3 A_i(u_1, u_2, u_3) \mathbf{e}_i(u_1, u_2, u_3)$$

I ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem motsvarar räkneregler för skalär och kryss produkten de vi har sett tidigare:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^3 A_i(u_1, u_2, u_3) B_i(u_1, u_2, u_3) \quad \text{och} \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathbf{e}_2(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathbf{e}_3(A_1 B_2 - A_2 B_3). \end{aligned} \tag{G.1}$$

#### G.2 Exempel: cylinderkoordinater

I andra avsnitt tittar vi på cylinderkoordinater:



Med  $(u_1, u_2, u_3) = (\rho, \varphi, z)$  har vi

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$$

så

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

Därför är

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1.$$

och

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{1}{h_z} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

### G.3 Exempel: sfäriska koordinater

I tredje avsnitt tittar vi på sfäriska koordinater:



**Film G.3:** <https://youtu.be/Gu9wCfWPIoU>

Med  $(u_1, u_2, u_3) = (r, \theta, \varphi)$  har vi

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, z) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

så

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0).$$

Därför är

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$$

och

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

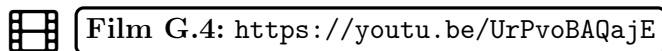
$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).$$

## G.4 Transformation av operatorer

Till skillnad från (G.1) kan vi inte överföra formlerna för gradient, divergens och rotation direkt från kartesiska koordinater till kroklinjiga koordinater. Anledningen för det är att  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  är konstanter medan  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  kan bero på koordinaterna och derivatorna handlar förstås om vad händer när vi varierar koordinaterna.

I följande videoklipp härledar vi en formel för gradienten i ett kroklinjigt koordinatesystem:



Om  $\mathbf{r}$  är ett variablebyte från ett ortogonalt kroklinjigt koordinatesystem  $(u_1, u_2, u_3)$  till kartesiska koordinater  $(x, y, z)$  och  $\tilde{\phi}$  är en skalär funktion av variablerna  $(u_1, u_2, u_3)$  är

$$\text{grad } \tilde{\phi} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial u_3} \mathbf{e}_3.$$

Man kan förstås också härleda formler för divergens och rotation i kroklinjiga koordinatsystem, men vi skriver bara resultaten här. Om ett vektorfält kan skrivas  $\mathbf{F}(u_1, u_2, u_3) = F_1(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_1 + F_2(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_2 + F_3(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_3$  är

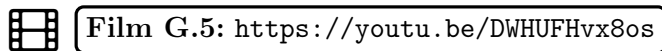
$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right)$$

och

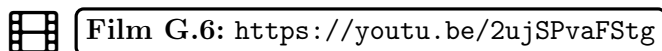
$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}.$$

Jämför formlerna här med vad vi såg i C.1.3.

Följande videoklipp är ett exempel av hur man kan använda formlerna ovan:



Ett mer omfattande exempel som är ett litet manageri av räkningar:



## Lektion G.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.1
- 8.2
- 8.3
- 8.4
- 8.5
- 8.6
- 8.7
- 8.8
- 8.9

## Lektion G.2

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.7
- 8.8
- 8.9
- 8.10
- 8.11
- 8.12
- 8.13
- 8.14
- 8.15