Modul G

Kroklinjiga koordinatsystem

Föreläsning G

Ramgard kapitel 10.

G.1 Introduktion

I första videoklipp introducerar vi vad vi menar med ett kroklinjigt koordinatsystem. I grunden är det ett variabelbyte $\mathbf{r}$ från (u_1, u_2, u_3)-rummet till (x, y, z)-rummet:

Film G.1: `https://youtu.be/edyGUnsVYeI`

Koordinatsystemet kallas för *ortogonalt* om

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} = 0 \quad \text{för } i \neq j$$

Vi normaliserar partiella derivator av $\mathbf{r}$ för att skapa ett *basvektorsystem* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{e}_i := \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad \text{där} \quad h_i := \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}\right|$$

Med hjälp av basvektorsystemet kan man skriva ett vektorfält $\mathbf{A}$ i (u_1, u_2, u_3)-koordinater:

$$\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^{3} A_i(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_i(u_1, u_2, u_3)$$

I ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem motsvarar räknereglar för skalär och kryss produkten de vi har sett tidigare:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^{3} A_i(u_1, u_2, u_3)B_i(u_1, u_2, u_3) \quad \text{och} \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1(A_2B_3 - A_3B_2) + \mathbf{e}_2(A_3B_1 - A_1B_3) + \mathbf{e}_3(A_1B_2 - A_2B_3). \end{aligned} \tag{G.1}$$

G.2 Exempel: cylinderkoordinater

I andra avsnitt tittar vi på cylinderkoordinater:

Film G.2: `https://youtu.be/Ju8LwQ458us`

Med $(u_1, u_2, u_3) = (\rho, \varphi, z)$ har vi

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$

så

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} &= (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)\\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

Därför är

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1.$$

och

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varepsilon} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\\ \mathbf{e}_z &= \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).\end{aligned}$$

G.3 Exempel: sfäriska koordinater

I tredje avsnitt tittar vi på sfäriska koordinater:

Film G.3: `https://youtu.be/Gu9wCfWPIoU`

Med $(u_1, u_2, u_3) = (r, \theta, \varphi)$ har vi

$$\mathbf{r}(\rho, \varphi, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

så

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} &= (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta)\\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} &= (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0).\end{aligned}$$

Därför är

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\sin\theta.$$

och

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)\\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0).\end{aligned}$$

G.4 Transformation av operatorer

Till skillnad från (G.1) kan vi inte överföra formlerna för gradient, divergens och rotation direkt från kartesiska koordinator till kroklinjiga koordinater. Anledningen för det är att $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ är konstanter medan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ kan bero på koordinatorna och derivatorna handlar förstås om vad händer när vi varierar koordinatorna.

I följande videoklipp härledar vi en formeln för gradienten i ett kroklinjigt koordinatesystem:

Film G.4: `https://youtu.be/UrPvoBAQajE`

Om $\mathbf{r}$ är ett variablebyte från ett ortogonalt kroklinjigt koodinatesystem (u_1, u_2, u_3) till kartesiska koordinater (x, y, z) och $\tilde{\phi}$ är en skalär funktion av variablerna (u_1, u_2, u_3) är

$$\operatorname{grad} \tilde{\phi} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial u_3}\mathbf{e}_3.$$

Man kan förstås också härleda formler för divergens och rotation i kroklinjiga koordinatsystem, men vi skriver bara resultaten här. Om ett vektorfält kan skrivas $\mathbf{F}(u_1, u_2, u_3) = F_1(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_1 + F_2(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_2 + F_3(u_1, u_2, u_3)\mathbf{e}_3$ är

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3}\right)$$

och

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}.$$

Jämför formlerna här med vad vi såg i C.1.3.

Följande videoklipp är ett exempel av hur man kan använda formlerna ovan:

Film G.5: `https://youtu.be/DWHUFHvx8os`

Ett mer omfattande exempel som är ett litet manageri av räkningar:

Film G.6: `https://youtu.be/2ujSPvaFStg`

Lektion G.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.1
- 8.3
- 8.4
- 8.5
- 8.6
- 8.9

Lektion G.2

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.7
- 8.10
- 8.11
- 8.12
- 8.13
- 8.15