Modul H

Gauss och Stokes sats i kroklinjiga koordinatsystem

Föreläsning H

Ramgard kapitel 10.

Gauss och Stokes sats är inte bunden till något särskilt koordinatsystem, men för att använda de i kroklinjiga koordinatsystem måste vi lista ut hur vi räknar flöde, cirkulation, med mera i kroklinjiga koordinatsystem.

I modul G har vi räknat formler för divergensen och rotationen av ett vektorfält så det är bara integralerna i satserna som står kvar att förstå. Därför kunde en alternativ rubrik för modulen vara ”Integraler i kroklinjiga koordinatsystem”.

H.1 Volymintegraler

I första videoklipp nämnar jag några viktiga integraler och pratar om hur man kan beräkna volymintegraler i kroklinjiga koordinatsystem:

Film H.1: `https://youtu.be/DB_XybVPcZc`

Sen går vi igenom ett exempel av en volymintegral och säger även ett par ord om vektorfält med singulariteter:

Film H.2: `https://youtu.be/RDhoFl867AU`

H.2 Linjeintegraler

Näst går vi igenom vad vi menar med en kurvintegral i kroklinjiga koordinater:

Film H.3: `https://youtu.be/IqBsVv-i6Mk`

Och sen beräknar ett exempel av en kurvintegral:

Film H.4: `https://youtu.be/yXGstyS600A`

Vi kan även dubbelkolla att man får samma svar när man gör beräkningarna i Cartesiska koordinater:

Film H.5: `https://youtu.be/sKAQzpqZze0`

integral!linje-|)

H.3 Ytintegraler

Istället för att försöka härleda en allmänn formel för en ytintegral i kroklinjiga koordinater betrakta vi ett par exempel som illustrerar hur vi kan räkna. Först härledar vi en formel av en ytintegral över en koordinatyta:

Film H.6: `https://youtu.be/r8l1O22tlNo`

Och sen räkna vi ett exempel:

Film H.7: `https://youtu.be/k7MGgZTIen4`

Till slut betraktar vi en mer allmänt exempel där vi får en parametrisering av ytan som ges som en linjärkombination av basvektorerna för koordinatsystemet.

Film H.8: `https://youtu.be/jaIaGcyCyp8`

H.4 Exempel på derivator av basvektorer: cylinderkoordinater

Vi har att $\mathbf{e}_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ så

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \rho} = (0,0,0) = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \mathbf{e}_\varphi \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial z} = (0,0,0) = \mathbf{0},$$

och $\mathbf{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ så

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \rho} = (0,0,0) = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = (-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0) = -\mathbf{e}_\rho \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} = (0,0,0) = \mathbf{0},$$

och $\mathbf{e}_z = (0,0,1)$ så

$$\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = (0,0,0) = \mathbf{0}.$$

Lektion H.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.16
- 8.17
- 8.18
- 8.19
- 8.20

Lektion H.2

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.22

Från Ramgard:

- 113
- 115
- 117

Tips: Här skriver jag ett par anmärkningar angående uppgifter från Ramgard.

113 (a) Meningen här är att se vad händer om man tillämpar Gauss sats utan att kontrollera satsens antaganden, så försök inte att ta hänsyn till vektorfältets singularitet.

113 (b) S_1 och S_2 är sfärer med medelpunkter i origo (och $R_1 \neq R_2$). Uppgiften visar oss hur vi kan ta hänsyn till singulariteten.

115 Dela upp vektorfältet i två delar: $\text{grad}(1/\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2+z^2})$ och $\text{grad}(xy^3)$. Första delen kan se bekant ut från uppgift 113 eller Coloumbs lag, men se även sats 11.1 i Ramgard.

117 (a) Här är det meningen att man tillämpar Gauss sats på ett lämpligt sätt – det vill säga man tillämpar satsen på ytor som inte omslutar vektorfältets singulariteter. Det enklaste är att delar upp vektorfältet i två delar – $\text{grad}(\ln\rho)$ och $\text{grad}(1/\sqrt{\rho^2+z^2})$ – och tillämpar Gauss sats på båda delar. Första delen kan jämföras med andra lösning till exempel 11.2 i Ramgard. Återigen kan andra delen kan se bekant ut från uppgift 113 eller Coloumbs lag, men se även sats 11.1 i Ramgard.