

Modul H

Gauss och Stokes sats i kroklinjiga koordinatsystem

Föreläsning H


Ramgard kapitel 10.

Gauss och Stokes sats är inte bunden till något särskilt koordinatsystem, men för att använda de i kroklinjiga koordinatsystem måste vi lista ut hur vi räknar flöde, cirkulation, med mera i kroklinjiga koordinatsystem.


I modul G har vi räknat formler för divergensen och rotationen av ett vektorfält så det är bara integralerna i satserna som står kvar att förstå. Därför kunde en alternativ rubrik för modulen vara ”Integraler i kroklinjiga koordinatsystem”.

H.1 Volymintegraler

I första videoklipp nämnar jag några viktiga integraler och pratar om hur man kan beräkna volymintegraler i kroklinjiga koordinatsystem:


 **Film H.1:** https://youtu.be/DB_XybVPcZc

Sen går vi igenom ett exempel av en volymintegral och säger även ett par ord om vektorfält med singulariteter:


 **Film H.2:** <https://youtu.be/RDhoF1867AU>

H.2 Linjeintegraler


Näst går vi igenom vad vi menar med en kurvintegral i kroklinjiga koordinater:

 **Film H.3:** <https://youtu.be/IqBsVv-i6Mk>

Och sen beräknar ett exempel av en kurvintegral:

 **Film H.4:** <https://youtu.be/yXGstyS600A>

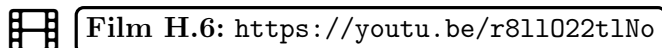
Vi kan även dubbelkolla att man får samma svar när man gör beräkningarna i Cartesiska koordinater:

 **Film H.5:** <https://youtu.be/sKAQzpqZze0>

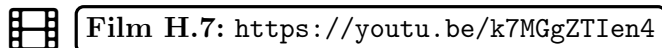
integral!linje-|)

H.3 Ytintegraler

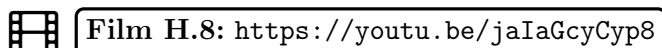
Istället för att försöka härleda en allmän formel för en ytintegral i kroklinjiga koordinater betrakta vi ett par exempel som illustrerar hur vi kan räkna. Först härledar vi en formel av en ytintegral över en koordinatyta:



Och sen räkna vi ett exempel:



Till slut betraktar vi en mer allmänt exempel där vi får en parametrisering av ytan som ges som en linjärkombination av basvektorerna för koordinatsystemet.



H.4 Exempel på derivator av basvektorer: cylinderkoordinater

Vi har att $\mathbf{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ så

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \rho} = (0, 0, 0) = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \mathbf{e}_\varphi \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial z} = (0, 0, 0) = \mathbf{0},$$

och $\mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ så

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \rho} = (0, 0, 0) = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0) = -\mathbf{e}_\rho \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} = (0, 0, 0) = \mathbf{0},$$

och $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ så

$$\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = (0, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

Lektion H.1

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.16
- 8.17
- 8.18
- 8.19
- 8.20

Lektion H.2

Från Nikoltjeva-Hedberg:

- 8.22

Från Ramgard:

- 113
- 115
- 117

Tips: Här skriver jag ett par anmärkningar angående uppgifter från Ramgard.

- 113 (a) Meningen här är att se vad händer om man tillämpar Gauss sats utan att kontrollera satsens antaganden, så försök inte att ta hänsyn till vektorfältets singularitet.
- 113 (b) S_1 och S_2 är sfärer med medelpunkter i origo (och $R_1 \neq R_2$). Uppgiften visar oss hur vi kan ta hänsyn till singulariteten.
- 115 Dela upp vektorfältet i två delar: $\text{grad}(1/\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2})$ och $\text{grad}(xy^3)$. Första delen kan se bekant ut från uppgift 113 eller Coloumbs lag, men se även sats 11.1 i Ramgard.
- 117 (a) Här är det meningen att man tillämpar Gauss sats på ett lämpligt sätt – det vill säga man tillämpar satsen på ytor som inte omslutar vektorfältets singulariteter. Det enklaste är att delar upp vektorfältet i två delar – $\text{grad}(\ln \rho)$ och $\text{grad}(1/\sqrt{\rho^2 + z^2})$ – och tillämpar Gauss sats på båda delar. Första delen kan jämföras med andra lösning till exempel 11.2 i Ramgard. Återigen kan andra delen kan se bekant ut från uppgift 113 eller Coloumbs lag, men se även sats 11.1 i Ramgard.