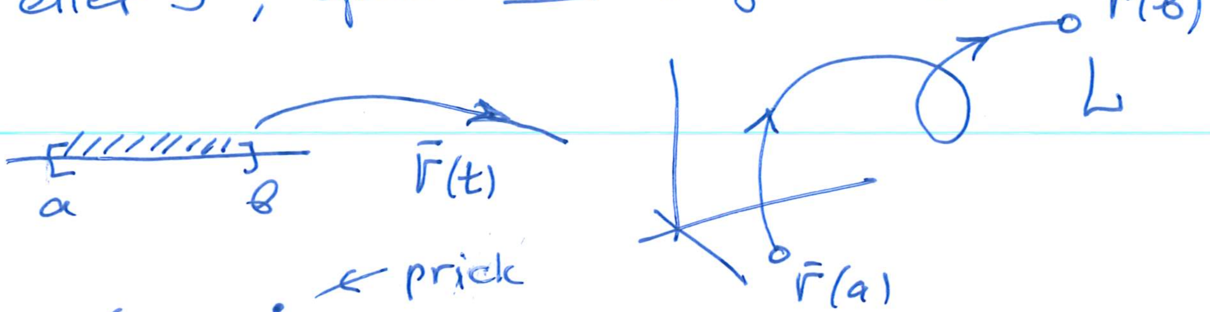
Fö 2

Problem 1 Längd av en kurva. Låt L vara en plan-/eller rymdkurva som ges av

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \quad a \le t \le b, \quad \bar{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^p$$

($p = 2$ eller 3, spelar inte någon roll)



← prick

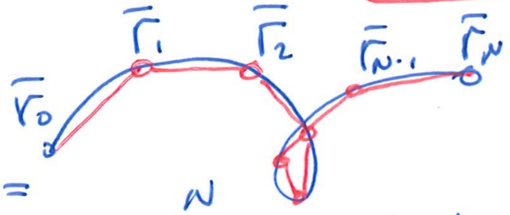
- $\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \bar{r}'(t) = \dot{\bar{r}}(t)$

  – hastighetsvektor

definition

Def Längden = sträcka $=:$ $\boxed{\int_a^b |\bar{r}'(t)|\,dt = \int_L |d\bar{r}|}$

Motivering:



"båglängd"

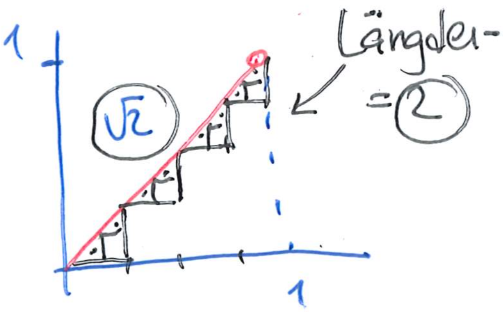
kurvans längd =

= gränsvärde av $\sum_{k=1}^{N} |\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}|$ = "polygontåg"

- $|\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}| = |\bar{r}(t_k) - \bar{r}(t_{k-1})|$ = approximativt $= |\bar{r}'(t_k)|\Delta t_k$

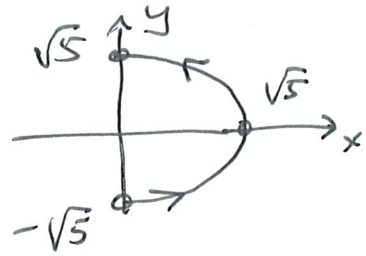
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} |\bar{r}_k - \bar{r}_{k-1}| \approx \sum_{k=1}^{N} |\bar{r}'(t_k)|(t_k - t_{k-1}) \approx \int_a^b |\bar{r}'(t)|\,dt$$

Obs! att denna konstruktion inte är trivialt: "en trappa":



Exemp. Bestäm längden av $L: \begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x \geq 0 \end{cases}$

Lösning. Parameterframställning:



$$\bar{r} = \begin{cases} x = \sqrt{5}\cos t \\ y = \sqrt{5}\sin t \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

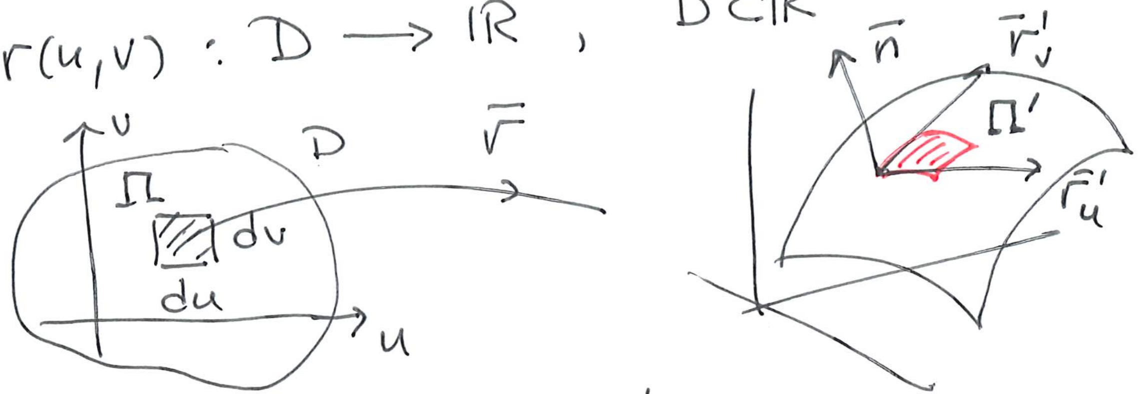
$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \sqrt{5}(-\sin t, \cos t), \quad \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \sqrt{5}$$

$$\text{Längden} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}\cdot\pi.$$

Problem 2 Bestäm arean hos en parameteryta.

$\bar{r} = r(u,v) : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad D \subset \mathbb{R}^2$

Idé:



$$\text{Area}(\Pi') \approx |\bar{r}'_u du \times \bar{r}'_v dv| = |\bar{r}'_u \times r'_v|\, du\, dv$$

$$\boxed{\text{Def.}}: S = \text{ytansarea} =: \iint_S \underset{\uparrow}{dS} = \iint_D \underbrace{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\, du\, dv}_{dS}$$

"$\boxed{\text{areaelement}}$"

*) <u>Obs.:</u> För att garantera existens behöver vi minst C^1-avbildningar $\bar{r}(u,v)$.

**) Om S ges av en graf: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$

$$\text{Area} = \iint_D \underbrace{\sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx\, dy}_{dS \,=\, \text{areaelement}}$$

Exemp. Bestäm arean av en nivåyta

$F(x,y,z) = C$

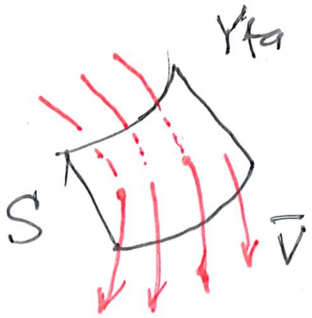
Lösning $F'_x + F'_z z'_x = 0$, $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$ etc

$$\sqrt{1+|\nabla z|^2} = \sqrt{1+\frac{F'^2_x}{F'^2_z}+\frac{F'^2_y}{F'^2_z}} = \frac{|\nabla F|}{|F'_z|}$$

$$\boxed{\text{areaelement}} = dS = \frac{|\nabla F|}{|F'_z|}\,dx\,dy$$

Problem 3 Flödesintegraler

Hur mycket vätska flödar genom en yta per tidsmom ?

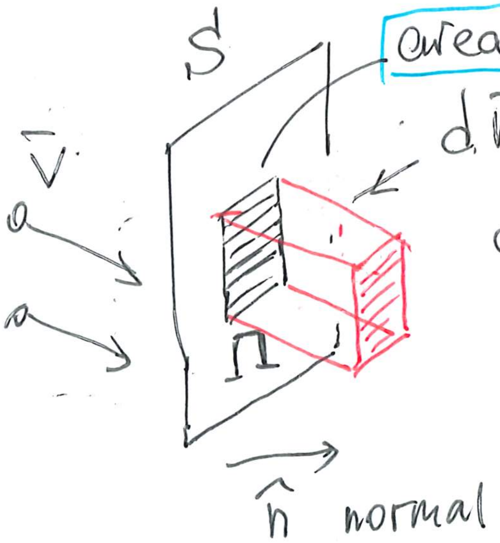


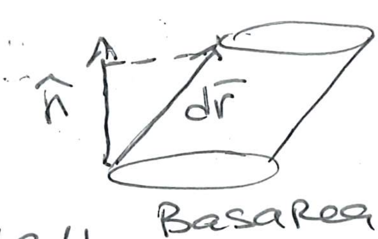
Vi har : • en yta $(\bar{r} = \bar{r}(u,v))$

• ett vektorfält $(\bar{F}(x,y,z))$

Infinitisimalt:

- en Yta = ett Plan
- en kurva = en linje
- ett vektorfält = en vektor





areaelement

$d\bar{r}$ = sträcka = $\boxed{\bar{v}\,dt}$

$$dVol = (d\bar{r}\cdot\hat{n})\,dS = \bar{v}\cdot\hat{n}\,dS\,dt$$

$$\frac{dVol(t)}{dt} = \iint_S \frac{\bar{v}\cdot\hat{n}\,dt}{dt}\,dS = \iint_S \bar{v}\cdot\hat{n}\,dS$$

Flödesintegral.

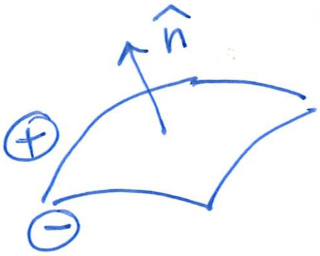
Allmänt: studerar vi ytintegraler som

Def: $\iint_S \bar{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint_S F_n\,dS =$ ← normal projektion

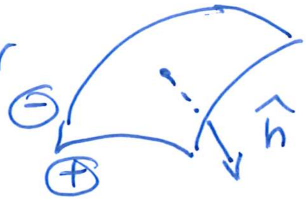
$= \iint_D F(\bar{r}(u,v))\cdot \underbrace{(\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)}_{\text{Obs. vektor!}}\,du\,dv$

Def Låt $\hat{n}$ vara ett. normalfält till en yta S.
Då sägs S vara orienterad (med $\hat{n}$).

- Orienterbarhet: +/− ⇒ ett begrepp.



eller



: två olika orienterings

$\begin{cases} \text{"+" sida}: \hat{n} \\ \text{"−" sida}: -\hat{n} \end{cases}$

T.ex. 1) $\hat{n} = \dfrac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}$ är orientering associerad med parametriseringen $\bar{r}(u,v)$

2) $\hat{n}$ som ges med orden "uppåt", "utåt", etc.
är en geometrisk orientering

- Flödesintegralen beror av orientering!
- Om S består av ett ändligt antal delytor S_i:

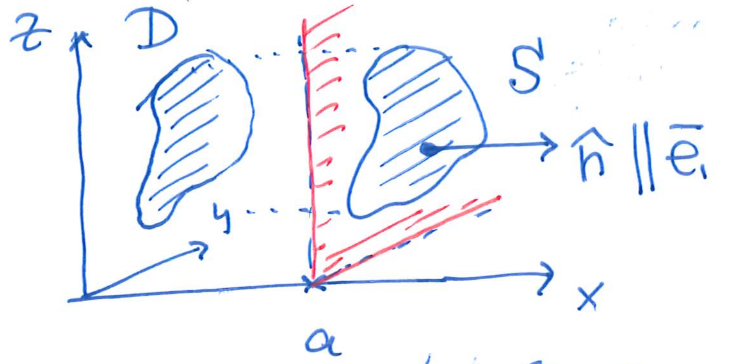
$S = S_1 + S_2 + \ldots \Rightarrow \iint_S F\cdot d\bar{S} = \sum_i \iint_{S_i} F\cdot d\bar{S}$

- $(-S)$ = ytan S med omkastad orientering

$\iint_{-S} F\cdot d\bar{S} = -\iint_S F\cdot d\bar{S}$ $\left(\text{jmf. } \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \right)$

Exempel: (Lemma) Låt S vara en yta som ges av:

$$S: \{(x,y,z) : x = a,\ (y,z) \in D\},\ \hat{n} = \bar{e}_1$$



(Obs. att S ligger i $x=a$-planet (a = konstant))

$$\iint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \left/ \bar{r}(u,v) = \begin{cases} x = a \\ y = u \\ z = v \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{r}'_u = (0,1,0) = \bar{e}_2 \\ \bar{r}'_v = (0,0,1) = \bar{e}_3 \end{array} \right.$$

$$(u,v) \in D \Rightarrow \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \bar{e}_1 \Big/$$

$$= \iint_D \underbrace{(F_1(a,u,v), F_2(a,u,v), F_3(a,u,v))}_{\bar{F}(a,u,v)} \cdot \underbrace{\bar{e}_1}_{\hat{n} = (1,0,0)} \, du\,dv =$$

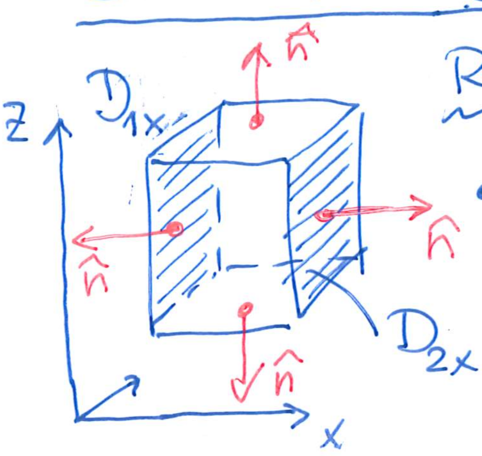
$$= \iint_D F_1(a,u,v)\, du\,dv \leftarrow \text{en vanlig dubbelintegral.}$$

Gauss' sats Låt $(S, \hat{n})$, $\hat{n}$ utåtriktade, begränsa området $D \subset \mathbb{R}^3$, låt $\bar{F}(\bar{x}) \in C^1(\bar{D})$. I såfall gäller Gauss's sats:

$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{S} = \iint_S \bar{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_D \operatorname{div} \bar{F}\, dV.$$

$S = \partial D$ = randen av D.

Gauss' sats (I) (ett speciellt fall)



Rätblock $D=\{a_1\le x\le a_2,\ b_1\le y\le b_2,\ c_1\le z\le c_2\}$

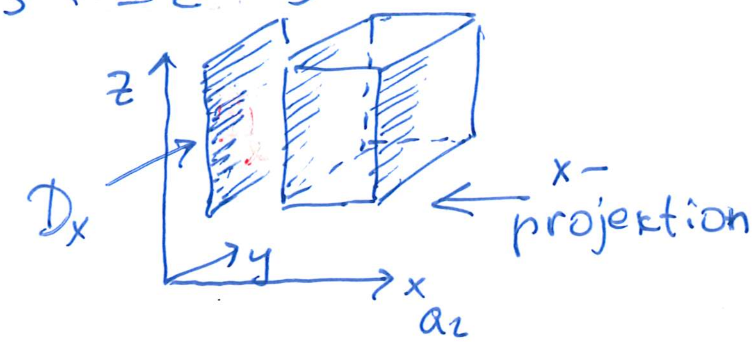
- ∂D = sex ytor $= D_{1x}\cup D_{2x}\cup\ldots\cup D_{2z}$
- $D_{i,x}=\{x=a_i,\ y\in[b_1,b_2],\ z\in[c_1,c_2]\}$, $i=1,2$

Vi orienterar $D_{i,x}$ med utåtriktade normal $\hat{n}$

Betrakta $\bar{F}(x)=F_1(x)\bar{e}_1+F_2(x)\bar{e}_2+F_3\bar{e}_3$

$$\iint_{\partial D}\bar{F}(x)\cdot d\bar{S}=\iint_{\partial D}\sum_{i=1}^{3}F_i(x)\,\underbrace{\bar{e}_i\cdot\hat{n}}\,dS=$$ /obs. $\bar{e}_i\cdot\hat{n}$ kan vara $0, 1, -1$

$$=\underbrace{-\iint_{D_{1x}}F_1(x)\,dS+\iint_{D_{2x}}F_1(x)\,dS}_{I_1}+I_2+I_3$$



Å andra sidan:

$$\iiint_D\frac{\partial F_1}{\partial x}\,\underbrace{dV}_{dxdydz}=\left(\begin{array}{l}\text{med hjälp av}\\ \text{stavar i x-led.}\end{array}\right)=\iint_{D_x}\left(\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial F_1}{\partial x}dx\right)dydz$$

$$=\iint_{D_x}\Big(F_1(a_2,y,z)-F_1(a_1,y,z)\Big)\,dydz=$$ (enligt ex. lemma)

$$=\iint_{D_{2x}}\bar{F}\cdot d\bar{S}-\int_{D_{1x}}\bar{F}\cdot dS=I_1\ (\text{se}\uparrow),$$ vilket ger div $\bar{F}(x)$

V.S.B ∎