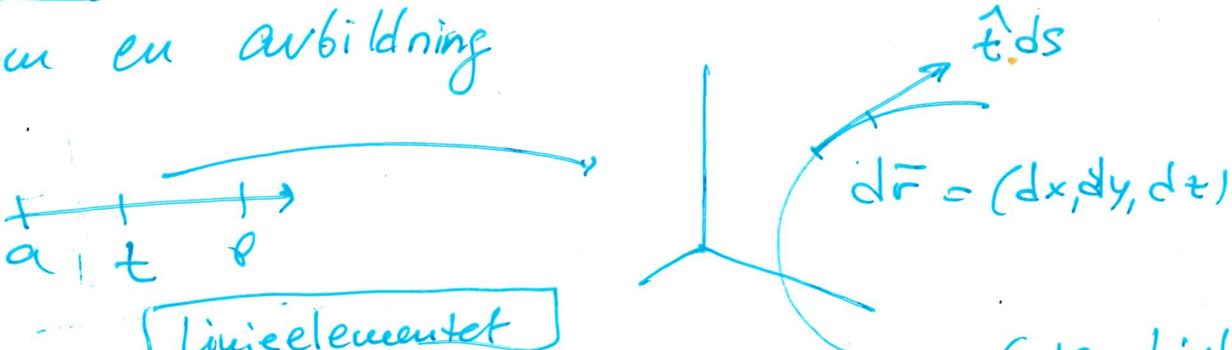
Linjeintegraler (Fö 4)

- L är en parametriserad kurva:

$\bar{r} = (x, y) = (x(t), y(t))$, eller $\bar{r} = (x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$

där $a \leq t \leq b$

- Obs. att: en kurva som en delmängd av $\mathbb{R}^2$ och som en avbildning



Linjeelementet

- $d\bar{r} = \bar{r}(t+dt) - \bar{r}(t) = \dfrac{d\bar{r}}{dt}\,dt = \hat{t}\,ds$ (ds = båglängd elementet)

- L är styckvis kontinuerligt deriverbar.
= vars parameterframställning $\bar{r}(u)$ är kontinuerlig + styckvis kont. deriv. längs kurvan L

- Arbetet en partikel rör sig längs kurvan i kraftfältet $\bar{F}(\bar{r})$ tillförs vid förflyttningen $d\bar{r} = \hat{t}\,ds$

det lilla arbetet

$$\bar{F} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot \hat{t}\,ds$$ (kraften projektion i vägens riktning gången vägen).

$$W = \int_L \bar{F} \cdot d\bar{r} = \text{Arbetet.}$$

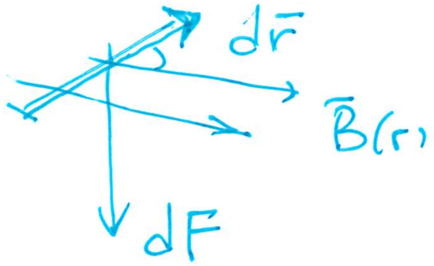
- Allmänt

$$\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_L A_1\,dx + A_2\,dy = \int_a^b \bar{A}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt$$

Ex. 2 En elektrisk ledare L genomflyts av strömmen I. Linjeelementet $d\bar{r}$ vid $\bar{r}$ påverkas av en kraft $d\bar{F}$ som ortogonal mot både $d\bar{r}$ och den magnetiska fältstyrkan $\bar{B}(\bar{r})$ vid $d\bar{r}$:

$$d\bar{F} = I\, d\bar{r} \times \bar{B}(\bar{r})$$

Biot-Savarts lag



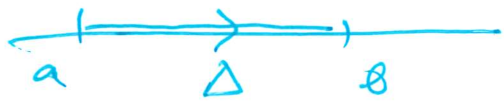
den totala kraften på tråden

$$\bar{F} = -\int_L I \cdot \bar{B} \times d\bar{r}$$

Ex. 3. Densitet / Längd

$$\int_L \rho(\bar{r}) \overset{\text{"}ds\text{"}}{|d\bar{r}|} = \int_L \rho(\bar{r})\, ds$$

Ex. 4 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\Delta \bar{F} \cdot d\bar{r}$, $\bar{F} = (f(x), 0)$, $\bar{r} \sim \Delta$



GREENS formel. (i planet)

Sats Låt D vara ett område i xy-planet, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ definierade och C^1 i D. Låt D begränsas av styckvis glatta randkurva C orienterad moturs. Då gäller

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_C (P\,dx+Q\,dy)$$

Ex.

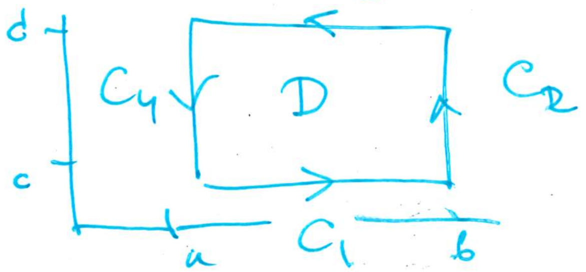
$$\oint_C (\overset{Q}{x}\,dy - \overset{P}{y}\,dx) = \iint_D 2\,dx\,dy = 2\,\text{Area}(D)$$

T.ex.

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} R\cos t\cdot R\cos t\,dt + R^2\sin^2 t\,dt = \underline{R^2\cdot 2\pi} = 2\cdot\pi R^2$$

Bevis



$$C_1: \begin{cases} x = t \in [a,b] \\ y = c \end{cases}$$

$$\int_{C_1} P\,dx+Q\,dy = \int_a^b P(x,c)\,dx$$

$$\int_{C_3} P\,dx+Q\,dy = -\int_a^b P(x,d)\,dx$$

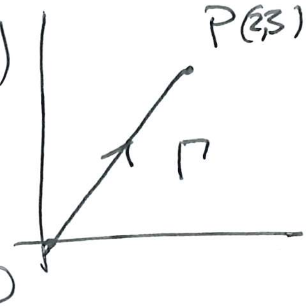
$$\int_{C_1}+\int_{C_2} = \int_a^b \left(P(x,c)-P(x,d)\right)dx$$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_a^b\left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right)dx =$$

Ex. 2 Beräkna $I = \int_\Gamma x\,dx + y\,dy$, $\Gamma: (0,0) \to (2,3)$

Lösning

Parametriserar $\Gamma: \bar{r} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$



$\Rightarrow (x,y) = (2t, 3t)$, $t: 0 \to 1$.

$$I = \int_0^1 \underbrace{2t}_{x}\cdot\underbrace{2dt}_{dx} + \underbrace{3t}_{y}\cdot\underbrace{3dt}_{dy} = \int_0^1 13t\,dt$$

$$I = \frac{13}{2}$$

Alternativ 2: $x\,dx + y\,dy = d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) = d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$

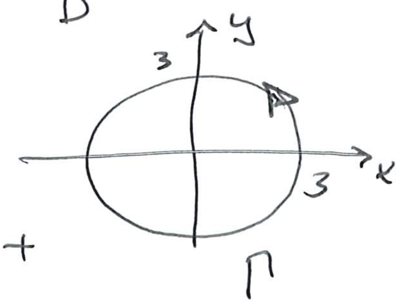
$$I = \int_\Gamma x\,dx + y\,dy = \int_\Gamma d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = \text{"ändringen" längs } \Gamma = \left[\frac{x^2+y^2}{2}\right]_0^P =$$

$$= \frac{4+9}{2} - \frac{0+0}{2} = \frac{13}{2}$$

Ex. 2 $\Gamma = \{x^2+y^2 = 9, \text{ moturs}\}$, $\bar{F} = (y, -x)$.

1) $$\int_\Gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \left| \begin{matrix}\text{med}\\ \text{GREEN}\end{matrix} \right| = \iint_D \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) dx\,dy = -2\iint_D dx\,dy =$$

$$= -2\cdot\text{area}(D) = -2\cdot 3^2\pi = -18\pi$$



2) $$\int_\Gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \left| \begin{matrix}\text{parameterisering}\\ x = 3\cos\varphi\\ y = 3\sin\varphi\\ \varphi: 0 \to 2\pi\end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} (3\sin\varphi\cdot(-3\sin\varphi) + {} - 3\cos\varphi\cdot 3\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} -9\,d\varphi = -9\cdot 2\pi = -18\pi.$$