# F5 | Kurvintegraler i Rummet. Stokes formel



- En rymdkurva Γ kan ges på parameterform

$$\bar{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} = (x(t), y(t), z(t))$$

där parametern $t: a \to b$ ("orientering").

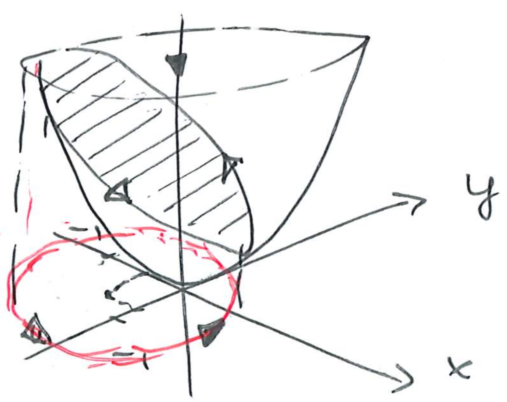
Kurvans begynnelsepunkt är $\bar{r}(a)$, och slutpunkt är $\bar{r}(b)$.

- En rymdkurva Γ sägs vara sluten om $\bar{r}(a) = \bar{r}(b)$.
- En kurva Γ sägs vara enkel om $\bar{r}(t_1) \neq \bar{r}(t_2)$ för alla $a \le t_1 < t_2 \le b$, förutom $t_1 = a$, $t_2 = b$.

enkel ej sluten — enkel sluten — ej enkel.

Ex. Betrakta Γ = skärningslinjen mellan $z = x^2 + y^2$ och $2x + 2y + z = 2$, orienterad moturs från (0,0,10) ("positiva z-axeln").

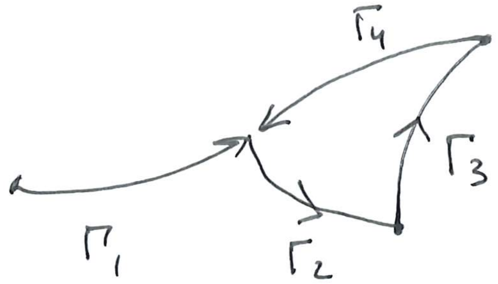
Skärningslinjen: $z = 2 - 2x - 2y$ ger $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2 \iff$
$\iff (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$, en cirkel med medelpunkt i $(-1,-1)$, $r = 2$



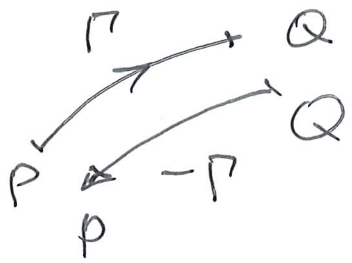

Orientering "moturs" i planet $(x,y)$

## Räkneregler:

1) $$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\dots} \bar{A}\cdot d\bar{r} = \int_{\Gamma_1} \bar{A}\cdot d\bar{r} + \int_{\Gamma_2} \bar{A}\cdot d\bar{r} + \dots$$




2) $$\int_{-\Gamma} \bar{A}\cdot d\bar{r} = -\int_{\Gamma} \bar{A}\cdot d\bar{r}$$




$-\Gamma$ är samma kurva som $\Gamma$ men riktad i motsatt riktning.

---

Exem (forts.) Räkna $\int_\Gamma \bar{A}\cdot d\bar{r}$, $\bar{A}=(x,y,0)$, $\Gamma$ som ovan i exempel.

Lösning: Parameterisering:

$$\bar{r}: \begin{cases} x = -1+2\cos t \\ y = -1+2\sin t \\ z = 2-2(-1+2\cos t)-2(-1+\sin t) \\ \quad = 6-4\cos t-4\sin t \end{cases}$$

$$\bar{r}'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 4\sin t-4\cos t \end{pmatrix}$$

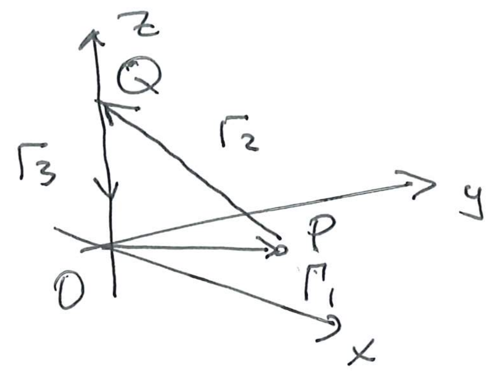
$$\bar{r}'\cdot\bar{A}(\bar{r}) = (-1+2\cos t)(-2\sin t) + (-1+2\sin t)\cdot(2\cos t) + 0$$
$$= 2\sin t - 2\cos t$$

$$\int_\Gamma \bar{A}\cdot d\bar{r} = \int_0^{2\pi} (2\sin t - 2\cos t)\,dt = 0.$$

Ex. Beräkna $\int_\Gamma \overbrace{x\,dy - z\,dx}^{\omega}$ längs

$\Gamma$, en sluten triangel: $(0,0,0) \to (0,1,1) \to (0,0,1)$

$$\int_\Gamma \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega = I_1 + I_2 + I_3$$




$$I_1 = \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 0, \\ t: 0 \to 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t\,dt - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \left| \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ t: 0 \to 1 \end{array} \right| = \int_0^1 (1-t)(-dt) - t(-dt) = \int_0^1 (2t-1)\,dt = 0$$

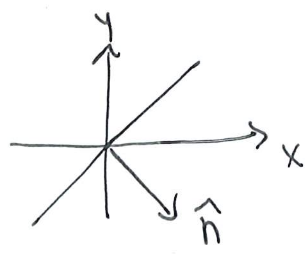
$$I_3 = \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 - t \\ t: 0 \to 1 \end{array} \right| = \int_0^1 0 - (1-t)\cdot 0 = 0$$

Svar: $\int_\Gamma x\,dy - z\,dx = \frac{1}{2}$

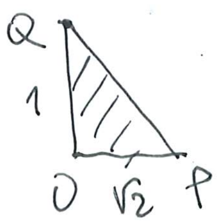
---

(2) Med Stokes! $S$ är ytstycke i plan: $y - x = 0$: $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{rot}\,\bar{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -z & x & 0 \end{vmatrix} = (0; -1; 1)$$




$$\text{rot}\,\bar{A} \cdot n = (0,-1,1) \cdot (1,-1,0) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$




$$\int_\Gamma \omega = \iint_S \frac{1}{\sqrt{2}}\,dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Area}(S) = \frac{\sqrt{2}\cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

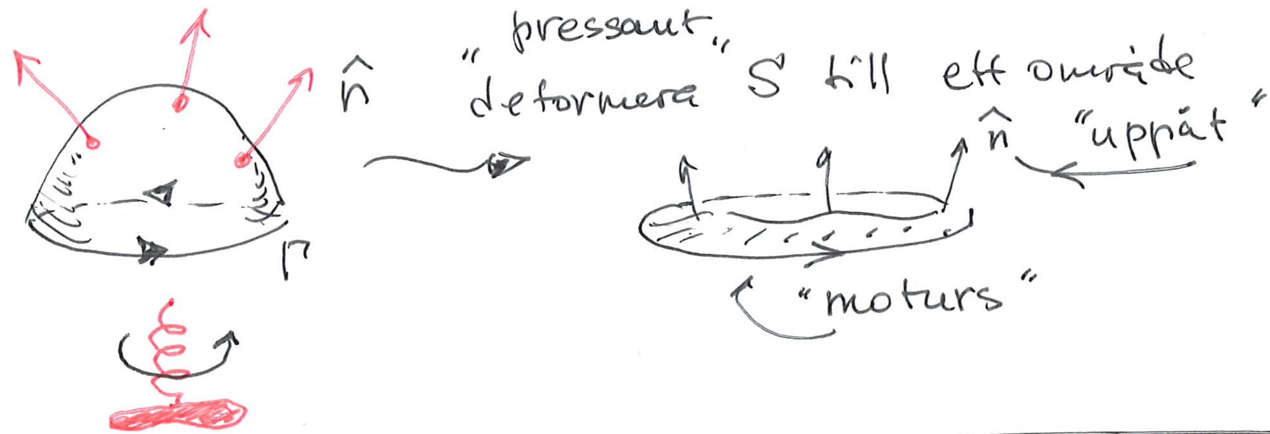
## §2. Stokes Sats

Låt $S$ vara ett ytstycke med rand $\Gamma$:
(vi förutsätter att $\Gamma$ är enkel)

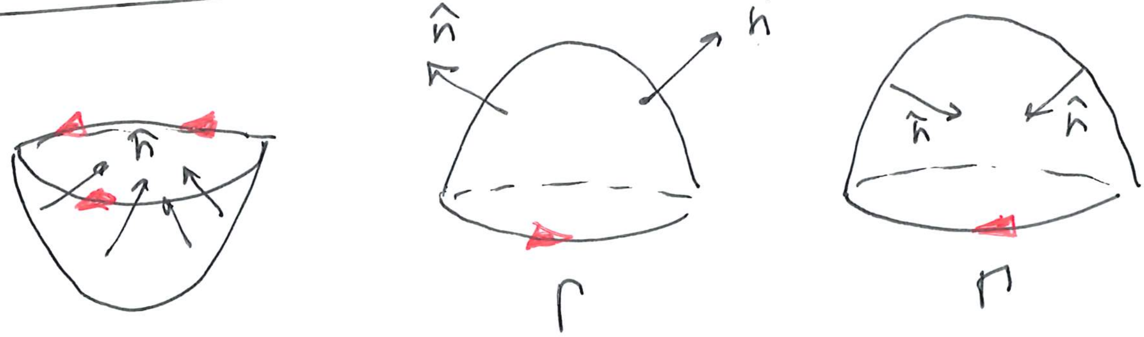

Def $S$ sägs vara orienterad om $S$ har tilldelats en normal riktning $\hat{n}$.

Randen $\Gamma$ till $S$ ($\Gamma = \partial S$) har positiv orientering (omloppsriktning) i förhållande till den orienterade ytan $S$ om $S$ ligger till vänster om $\Gamma$ då man går runt $\Gamma$ med en pil riktad i samma riktning som $\hat{n}$.

Alternativt, om korkskruvregeln gäller:




Ex.



Stokes Sats  Om $S$ är en yta som begränsas av en enkel, sluten kurva med positiv omloppsriktning och om $\bar{A} \in C^1$ på hela $S$ och $\Gamma$, så gäller

$$\int_{\Gamma} \bar{A} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot \hat{n}\, dS = \iint_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot d\bar{S}$$

---

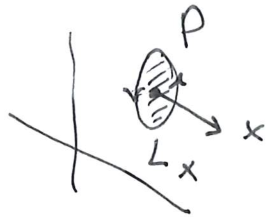
Speciell fall  Låt $D \subset xy$-planet och $\bar{A} = (P(x,y), Q(x,y), 0)$, då får vi GREENS SATS

$$\int_{\Gamma} \bar{A} \cdot d\bar{r} = \iint_S (\nabla \times \bar{A}) \cdot \hat{n}\, dS = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

---

Rotationen: Antag att $\bar{A} \in C^0$-vektorfält,

$$(\text{rot}\, \bar{A})_x(P) = \lim_{\Delta S_x \to 0} \frac{1}{\Delta S_x} \oint_{L_x} \bar{A} \cdot d\bar{r}$$




korkskruvorienten

etc.

$$\text{rot}\, \bar{A} = \nabla \times \bar{A}$$

---

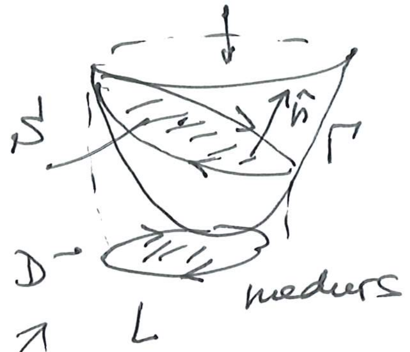
VIRVELFRIA: $\text{rot}\, \bar{A} = 0$ i

Sats  $\text{rot}\, \bar{A} = 0$ i ett enkelt sammanhängande område $\Leftrightarrow$ A har en skalär potential $\varphi$.

Ex. (Tenta 2018/10/22)

$A(xy, yz, xz)$, $\Gamma$: skärningen av planet $2x+2y+z=2$ och paraboloiden $z=x^2+y^2$, genomlöps medurs sett från $(0,0,1)$

Lös. $\hat{n}=(2,2,1)$ uppåt




$$\oint_{-\Gamma} \bar{A}\cdot\bar{r} = \iint_S (\nabla\times\bar{A})\cdot d\bar{S} =: I$$

$$\nabla\times\bar{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} =$$

$$= (-y; -z; -x)$$

$$(\nabla\times\bar{A})\cdot\hat{n} = -2y-2z-x = -2y-2(2-2x-2y)-x = -4+2y+3x$$

ges av $\begin{cases} 2x+2y+z=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2x+2y=2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=4$$

$$D: (x+1)^2+(y+1)^2\le 4$$

$$I=\iint_D (3x+2y-4)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(3(-1+\rho\cos\varphi)+2(-1+\rho\sin\varphi)-4\right)\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$= -9\cdot 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = -36\pi$$

$$\Rightarrow -\oint_\Gamma \bar{A}\cdot\bar{r} = -36\pi \Rightarrow \oint_\Gamma \bar{A}\cdot\bar{r} = 36\pi$$