# F6. Potentialfält

Låt oss betrakta arbetet $\int_\Gamma \bar{F}\cdot d\bar{r}$ där kraften $\bar{F}$ kan skrivas som gradient av en funktion $\varphi$.

$$\bar{F}(\bar{r}) = \nabla\varphi(\bar{r}) = (\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z).$$

Vi ser att (om $\bar{r} = (x(t), y(t), z(t))$, $t: a \to b$)

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = (\varphi'_x x'(t) + \varphi'_y y'(t) + \varphi'_z z'(t))\,dt = \frac{d\varphi(\bar{r}(t))}{dt}\cdot dt$$

kedjeregeln

d.v.s.

$$\int_\Gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_a^b \frac{d\varphi(\bar{r}(t))}{dt}\,dt = [\varphi]_{\bar{r}(a)}^{\bar{r}(b)} = \varphi(\bar{r}(b)) - \varphi(\bar{r}(a)) \quad (*)$$

där $\bar{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ är $\Gamma$'s parameterisering.

Alltså visar (*) att arbetet beror endast på kurvans ändpunkter och inte om vägen mellan.

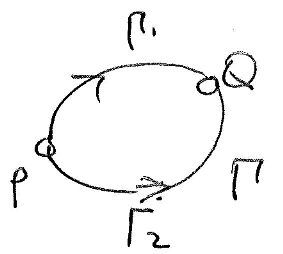
**Def** Ett vektorfält $\bar{F}$ i $D \subset \mathbb{R}^3$ kallas konservativt om $\int_\Gamma \bar{F}\cdot d\bar{r}$ är oberoende av integrationsvägen mellan ändpunkter för varje $\Gamma \subset D$.

**Sats 1** Ett potentialfält är konservativt.

**Sats 2** Ett vektorfält är konservativt $\Leftrightarrow$ $\oint_\Gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$ för varje sluten kurva i $D$.

**Bevis:** ($\Rightarrow$) Då $\oint_\Gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2} \bar{F}\,d\bar{r} = 0$.

($\Leftarrow$)



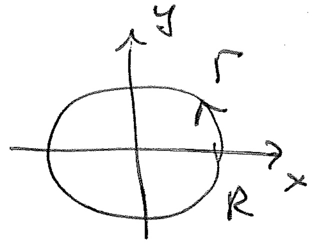
(3)

Ex. $\operatorname{rot}\Big(\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}\,;\ \frac{x}{x^2+y^2}\,;\ 0}_{\bar F}\Big)=0$

$\Rightarrow$ $\bar F$ är virvelfritt (rotationsfritt) $\nabla\times\bar F=\operatorname{rot}\bar F=0.$

Obs. att

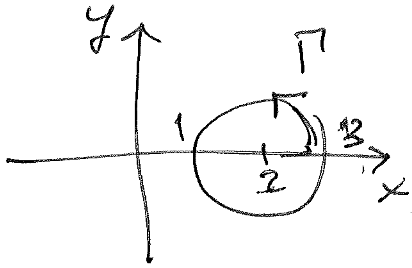
a) $\displaystyle\int_\Gamma \bar F\,d\bar r=\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\\ z=0\end{cases}=$




$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\frac{(-R\sin t)}{R^2}(-R\sin t)\,dt+\frac{R\cos t}{R^2}(R\cos t)\,dt=\ 2\pi$

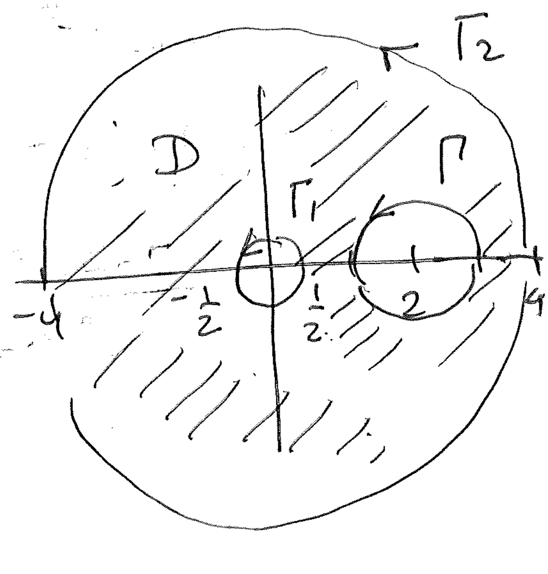
b) Däremot

$\displaystyle\int_\Gamma \bar F\,d\bar r=\begin{cases}x=2+\cos t\\ y=\sin t\\ z=0\end{cases}$




$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t}{4+4\cos t+1}(-\sin t\,dt)+\frac{2+\cos t}{4+4\cos t+1}\cos t\,dt=$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\underbrace{\frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}}_{f}\,dt=$ svårt, men man kan visa att $=0$



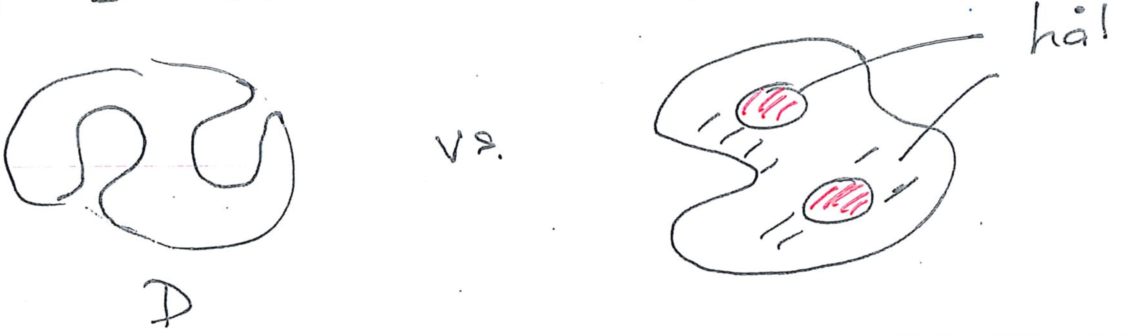

Alternativ II $\quad\bar F\in C^1(D)$

$\partial D=\Gamma_2+(-\Gamma)+(-\Gamma_1)$

$\displaystyle\Rightarrow\iint_D \operatorname{rot}\bar F\,d\bar S=0=\int_{\Gamma_2}-\int_{\Gamma}-\int_{\Gamma_1}\bar F\cdot dr$

där (a) $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\Gamma_2}=\int_{\Gamma_1}=2\pi\ \Rightarrow\ \int_\Gamma=2\pi-2\pi=0$ ∎

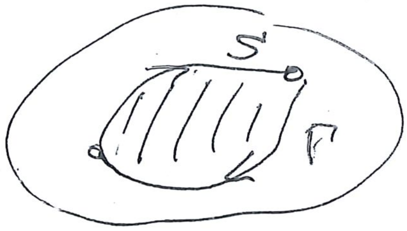
<u>Def</u> Ett område $D \subset \mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ kallas <u>enkelt sammanhängande</u> om varje enkel sluten kurva kan dras samman till en punkt utan att lämna $D$ under sammandragningen.



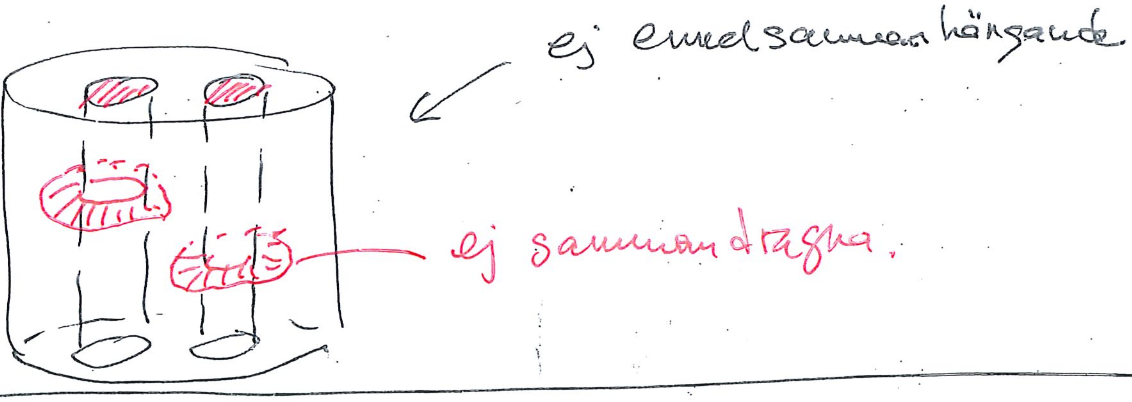

<u>Sats. 5</u> Låt $D$ vara ett enkeltsammanhängande mängd i $\mathbb{R}^3$ och $\text{rot}\,\bar{A} = 0$ i $D \cup \partial D$. Då är $\bar{A}$ ett potentialfält. (<u>"rotationsfritt"</u>)

<u>Bevis</u>

$$\int_\Gamma \bar{A}\cdot d\bar{r} = \iint_S \text{rot}\,\bar{A}\cdot d\bar{S} = 0$$




$\Rightarrow$ m.h.a. Sats 3 existerar $\varphi$. ∎

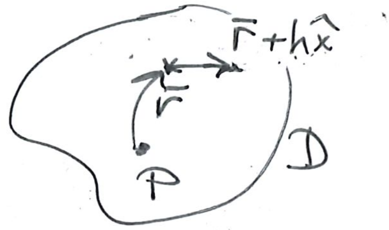



$$\nabla\times A = 0 \iff \oint_{\forall\Gamma} \bar{A}\cdot d\bar{r} = 0 \iff \int_\Gamma \bar{A}\cdot dr \text{ oberoende} \iff \bar{A} = \nabla\varphi$$

Integralen $\oint_{\Gamma} \bar{F}\cdot d\bar{r}$ kallas cirkulationen av $\bar{F}$ längs sluten kurva $\Gamma$.

Sats 3 Om $\bar{F}$ är $C^0$ och konservativt $\Rightarrow \bar{F}$ är potentialfält

Bevis. Definiera




$$\varphi(\bar{r}) = \int_{P\to\bar{r}} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

Obs. att $\varphi(\bar{r})$ inte beror av integrationsvägen.

$$\varphi(\bar{r}_0 + h\hat{x}) - \varphi(\bar{r}_0) = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}_0 + h\hat{x}} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \left| \begin{array}{l} \bar{r} = \bar{r}_0 + ht\hat{x} \\ t: 0 \to 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \bar{F}(\bar{r}_0 + ht\hat{x})\cdot(h, 0, 0)\, dt = h\int_0^1 F_1(x_0 + ht, y_0, z_0)\, dt$$

$$= (1-0)\cdot F_1(x_0 + h\xi, y_0, z_0)\cdot h, \quad 0 < \xi < 1. \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\bar{r}_0 + h\hat{x}) - \varphi(\bar{r}_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \varphi'_x(\bar{r}_0) \overset{(**)}{=} F_1(\bar{r}_0)$$

$$\Rightarrow \bar{F} = (F_1, F_2, F_3) = (\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z) = \nabla\varphi \qquad \blacksquare$$

---

Sats 4 $\nabla \times \nabla\varphi = 0 \quad (\varphi \in C^2)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix} = (\varphi''_{yz} - \varphi''_{zy}, \varphi''_{xz} - \varphi''_{zx}, \varphi''_{yx} - \varphi''_{xy})$$

$$= \bar{0}.$$

<u>Exempel 2</u>. (7.9) Bestäm konstanterna $a, b$ ...
så att $\bar{A}(x,y,z) = (axy + z^3)\hat{x} + x^2\hat{y} + b x z^2 \hat{z}$ ett potentialfält
b) Bestäm en potential till fältet

<u>Lösning</u> a) $\nabla \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ axy + z^3 & x^2 & bxz^2 \end{vmatrix} =$

$= (0 - 0;\ 3z^2 - bz^2;\ 2x - ax) = 0 \iff b = 3,\ a = 2.$

b) $\bar{A} = (2xy + z^3,\ x^2;\ 3xz^2)$

$$\begin{cases} \varphi'_x = 2xy + z^3 \\ \varphi'_y = x^2 \\ \varphi'_z = 3xz^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\varphi = x^2 y + x z^3 + g(y,z) \\ &\varphi'_y = x^2 + g'_y(y,z) = x^2 \Rightarrow g = g(z) \\ &\varphi'_z = 0 + 3xz^2 + g' = 3xz^2 \Rightarrow g = C \end{aligned}$$

<u>Svar</u> $\underline{\varphi = x^2 y + x z^3 + C}$

<u>Ex. 3.</u> Visa att vektorfältet $A(x,y,z) = 2x\sqrt{y}\,(4, \frac{x}{y}, 0)$ är konservativt och bestäm dess potential.

<u>Lös</u> $\nabla \times A = \nabla \times (8xy^{1/2};\ 2x^2 y^{-1/2};\ 0) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 8xy^{1/2} & 2x^2y^{-1/2} & 0 \end{vmatrix} =$

$= (0; 0;\ 4xy^{-\frac{1}{2}} - 8x \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}) = 0$

$$\begin{cases} \varphi'_x = 8xy^{1/2} \\ \varphi'_y = 2x^2 y^{-1/2} \\ \varphi'_z = 0 \end{cases} \begin{aligned} &\iff \varphi = 4x^2 y^{1/2} + h(y,z) \\ &\varphi'_y = 2x^2 y^{-1/2} + h'_y(y,z) = 2x^2 y^{-1/2} \Rightarrow h = h(z) \\ &\Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow \underline{\varphi = 4x^2 y^{1/2} + C}. \text{ Svar} \end{aligned}$$

Ex. Beräkna $\int_\Gamma \overbrace{(3y + 2\sin(2x-y))}^{P} dx + \overbrace{(3x - \sin(2x-y))}^{Q} dy$

längs parabeln $\Gamma: y = 2x^2, (0,0) \to (1,2)$

Lösn. $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (3 - 2\cos(2x-y)) - (3 - 2\cos(2x-y)) = 0$

$\Rightarrow \quad \bar{A} = (P(x,y), Q(x,y))$ är ett potentialfält.

Söker $\varphi$: $\begin{cases} \varphi'_x = 3y + 2\sin(2x-y) \\ \varphi'_y = 3x - \sin(2x-y) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\varphi(x,y) = 3xy - \cos(2x-y) + g(y)$

$\Rightarrow \varphi'_y = 3x - \sin(2x-y) + g'(y) \Rightarrow \quad g'(y) = 0 \Rightarrow g = c$

$I = \varphi(1,2) - \varphi(0,0) = \left[3xy - \cos(2x-y)\right]_{(0,0)}^{(1,2)} =$

$= (6 - \cos 0) - (0 - \cos 0) = 6.$