TATA44 Lösningar till tentamen 22/08/2011.

1.) Ytan $z = 3 - x^2 - y^2$ skär ytan $z^2 - x^2 - y^2 = 3$ då $z^2 + z = 6$ som ger $(z+3)(z-2) = 0$. Eftersom $z \geq 0$ då är $z = 1$ eftersom $z = 2$. Punkterna på $z - x^2 - y^2 = 3$ som är ovanför $z^2 - x^2 - y^2 = 3$ uppfyller $z^2 - x^2 - y^2 \geq 3$, vilket ger att $z^2 + z - 6 \geq 0$ och då är $z \geq 2$. Vidare är $z \geq 0$ och då erhåller vi att $2 \leq z \leq 3$ vilket ger $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. Sätt $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Parametrisera ytan $z - x^2 - y^2 = 3$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 3 - x^2 - y^2)$ med $(x, y) \in D$. Observera att $\mathbf{r}'_x = (1, 0, -2x)$ och $\mathbf{r}'_y = (0, 1, -2y)$.

Ytstyckets area är nu

$$\begin{aligned}
A &= \iint_S dS = \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| \, dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy \\
&= [x = \rho \cos \phi, \ y = r \sin \phi, \ \ 0 \leq \rho \leq 1, \ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\rho^2} d\phi \right) \rho \, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho \, d\rho \\
&= [u = 1 + 4\rho^2] \\
&= \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{u} du \\
&= \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}.
\end{aligned}$$

2.) Låt S beteckna ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ och S_1 beteckna ytan $x^2 + y^2 \leq 4, \ z = 0$. Vidare låt V vara den kropp som omslutas av ytorna S och S_1. Området V ges genom olikheterna $x^2 + y^2 \leq 4, \ 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$. Alla normalvektorerna till S och S_1 pekar ut ur V. Vi ska beräkna $\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$. Med hjälp av Gauss Sats erhåller vi att

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV$$

Observera att $\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 = 0$ ty $\hat{n}_1 = (0, 0, -1)$ vilket ger $\mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 = -z^3$, och sedan är $z = 0$ på S_1. Då har vi

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

En enkel räkning ger

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= 3 \iiint_V (x^2+y^2+z^2) dxdydz \\
&= 3 \iint_{x^2+y^2\le 4} \left(\int_0^{4-x^2-y^2} (x^2+y^2+z^2) dz \right) dxdy \\
&= 3 \iint_{x^2+y^2\le 4} \left[(x^2+y^2)(4-x^2-y^2) + \frac{(4-x^2-y^2)^3}{3} \right] dxdy \\
&= [x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ \ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi] \\
&= 3 \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left[r^2(4-r^2) + \frac{(4-r^2)^3}{3} \right] d\phi \right) rdr \\
&= 6\pi \int_0^2 \left[r^2(4-r^2) + \frac{(4-r^2)^3}{3} \right] rdr \\
&= 96\pi
\end{aligned}$$

(efter sedvanliga kalkyler).

3.) Låt S beteckna ytan $z = \sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2,\ z \ge 0$ och S_1 beteckna området i xy-planet där $\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2 \ge 0,\ z = 0$. Låt V beteckna den kropp som S och S_1 omsluter. Vi ska beräkna $\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$. Enligt Gauss' Sats har vi nu att

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

där alla enhetsnormaler pekar ut ur V. På S_1 är $z = 0$ och $\hat{n}_1 = (0, 0, -1)$. Vidare är $\mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 = -z = 0$ på S_1. Då är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

Vi har $x^2 - y^2 \ge 0$ för att kunna definiera $\sqrt{x^2-y^2}$ som ett reellt tal. Detta ger $-|x| \le y \le |x|$. Nu har vi

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= 3 \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{x^2-y^2}-x^2-y^2} dz \right) dxdy \\
&= 3 \iint_D [\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2] dxdy
\end{aligned}$$

där D är området där $\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2 \ge 0,\ \ -|x| \le y \le |x|$. På grund av symmetri får vi

$$\iint_D [\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2] dxdy = 2 \iint_E [sqrt x^2 - y^2 - x^2 - y^2] dxdy$$

med $E : \sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2 \ge 0, \quad -x \le y \le x, \quad x \ge 0$. Med $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi$ kan vi beskriva E som $E : \rho \le \sqrt{\cos 2\phi}, \quad -\pi/4 \le \phi \le \pi/4$, ty $x^2 - y^2 = \rho^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi) = \rho^2 \cos 2\phi$ vilket ger att $\sqrt{x^2-y^2} - x^2 - y^2 \ge 0$ då $\rho\sqrt{\cos 2\phi} \ge \rho^2$, eller $\rho \le \sqrt{\cos 2\phi}$. Villkoret $-x \le y \le x,\ x \ge 0$ ger $-\pi/4 \le \phi \le \pi/4$.

Vi får nu

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV &= 6\iint_E [\sqrt{x^2-y^2}-x^2-y^2]dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi] \\
&= 6\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}}[\rho\sqrt{\cos 2\phi}-\rho^2]\rho d\rho\right)d\phi \\
&= 6\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[\frac{cos^2 2\phi}{3}-\frac{\cos^2 2\phi}{4}\right]d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\phi d\phi \\
&= \int_0^{\pi/4}\cos^2 2\phi d\phi \\
&= \int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 4\phi}{2}d\phi \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Således har vi

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \frac{\pi}{8}.$$

4.) En sedvanlig räkning ger $\mathbf{A}(r,\theta,\phi)=\nabla\Phi$ där

$$\Phi(r,\theta,\phi)=r^2+\sin^2\theta+\cos\phi+C$$

där C är en godtycklig konstant. Vi har nu

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\Phi(b)-\Phi(a)$$

där a är kurvans startpunkt och b är kurvans slutpunkt. Startpunkten a ges av villkoren $x=y,\ z=0$ och $x^2+2y^2+3z^2=9$ som ger $x^2=3$. Vi ska ha $x,y\geq 0$ och då är $x=y=\sqrt{3},\ z=0$. Detta ger $r=\sqrt{6},\ \theta=\pi/2,\ \phi=\pi/4$. Slutpunkten ges av villkoren $x=y,\ z=\sqrt{2}$ samt $x^2+2y^2+3z^2=9$ och $x,y\geq 0$, vilket ger $x=y=1$. Vi erhåller då $r=2,\ \theta=\pi/4,\ \phi=\pi/4$. Av detta får vi

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\Phi(2,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})-\Phi(\sqrt{6},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})=-\frac{5}{2}.$$

5.) Vi kan skriva $\mathbf{A}$ som $\mathbf{A}=\nabla\Phi$ där $\Phi=(x^2+2y^2+3z^2)^{1/3}$ för $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ den nämnda kurvan är sluten och ligger i området $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ och således måste $I=0$ ty $\mathbf{A}$ är ett potentialfält och då är

$$I=\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\Phi(b)-\Phi(a)$$

om Γ ligger inom området där $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, där a är kurvans startpunkt och b är kurvans slutpunkt. I vårt fall är $a=b$ ty kurvan är sluten.

6.) Vektorfältet är singulärt på linjen $x=y$, men vi har

$$\mathbf{A} = \nabla\Phi, \quad \text{med} \;\; \Phi(x,y) = 3(x-y)^{1/3}.$$

Linjen $x = y$ skär kurvan $x^2 + y^2 = 8$ i punkten $P : (2,2)$. Startpunkten är $(2\sqrt{2}, 0)$ och slutpunkten är $(0, 2\sqrt{2})$. Vi kan definiera $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ som en generaliserad integral:

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(2\sqrt{2},0)}^{P} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P}^{(0,2\sqrt{2})} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

Vi har nu

$$\int_{(2\sqrt{2},0)}^{P} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(P) - \Phi(2\sqrt{2}, 0) = -3(8^{1/6})$$

och

$$\int_{P}^{(0,2\sqrt{2})} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi((0, 2\sqrt{2})) - \Phi(P) = -3(8^{1/6}).$$

Således har vi

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -6(8^{1/6}).$$