TATA44 Lösningar till tentamen 15/01/2010.

1.)Lösning 1: Enligt Stokes' Sats är

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS,$$

där S är den del av planet $x + y + z = 1$ innanför cylindern $x^2 + y^2 = 1$, och $\hat{\mathbf{n}}$ är en enhetsnormal till S då Γ genomläps moturs (sett från punkten $(0, 0, 17)$). En parametrisering av S är $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$ med $(x, y) \in D$ och $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Vi har nu

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\
&= \iint_D (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dxdy \\
&= \iint_D (0, 0, -2) \cdot (1, 1, 1) dxdy \\
&= -2 \iint_D dxdy \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Parametrisera kurvan Γ genom att sätta $x = \cos\phi$, $y = \sin\phi$ och $z = 1 - \cos\phi - \sin\phi$ med $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Ortsvektorn för punkter på Γ är nu $\mathbf{r}(\phi) = (\cos\phi, \sin\phi, 1 - \cos\phi - \sin\phi)$. Vi har då $\mathbf{A} = (\sin\phi, -\cos\phi, 2 - 2(\cos\phi + \sin\phi))$ och

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} [-1 + 2(\sin\phi - \cos\phi) + 2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)] d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} [-1 + 2(\sin\phi - \cos\phi) + 2\cos 2\phi] d\phi \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

2.) Låt $\Phi(x, y, z)$ vara en potential till $\mathbf{A}$, då är $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ och detta ger oss ekvationssytemet

$$\begin{aligned}
\Phi'_x &= (2x + z)\cos(x^2 + xz) \quad (1) \\
\Phi'_y &= -(z + 1)\sin(y + yz) \quad (2) \\
\Phi'_z &= x\cos(x^2 + xz) - y\sin(y + yz) \quad (3).
\end{aligned}$$

ekvation (1) ger $\Phi = \sin(x^2 + xz) + g(y, z)$. Insättning av detta i ekvation (2) ger $g'_y(y, z) = -(z+1)\sin(y+yz)$ som ger $g(x, y) = \cos(y+yz)+h(z)$. Då är $\Phi = \sin(x^2+xz)+\cos(y+yz)+h(z)$, vilket ger, efter insättning i ekvation (3), att $h'(z) = 0$. Således har vi

$$\Phi = \sin(x^2 + xz) + \cos(y + yz) + C$$

där C är en godtycklig konstant. Vi kan välja $C = 0$. Eftersom $\mathbf{A}$ är ett potentialfält så är

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}(1)) - \Phi(\mathbf{r}(0)).$$

Vi har $\mathbf{r}(1) = (1, 1, \pi - 1)$ och $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$ vilket ger

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(1, 1, \pi - 1) - \Phi(0, 0, 0) = -2.$$

3.) Lösning 1: Låt Γ_1 vara kurvan $-1 \leq x \leq 1,\ y = 0$ som genomlöps i riktningen $x : -1 \to 1$. Sätt $D : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0$. Enligt Greens formel har vi då

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} (3x^2 + 4y)dx + (y^4 + 3y^2 + x)dy = \iint_D (-3)dxdy = -\frac{3\pi}{2}.$$

Således är

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (3x^2 + 4y)dx + (y^4 + 3y^2 + x)dy &= -\int_{\Gamma_1} (3x^2 + 4y)dx + (y^4 + 3y^2 + x)dy - \frac{3\pi}{2} \\
&= -\int_{-1}^{1} 3x^2 dx - \frac{3\pi}{2} \\
&= -2 - \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Man kan parametrisera kurvan Γ genom att sätta $x = \cos\phi,\ y = \sin\phi$ med $\phi : 0 \to \pi$, och vi för

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (3x^2 + 4y)dx + (y^4 + 3y^2 + x)dy &= \int_0^\pi [-(3\cos^2\phi + 4\sin\phi)\sin\phi + (\sin^4\phi + 3\sin^2\phi + \cos\phi)\cos\phi]d\phi \\
&= \int_0^\pi [-3\cos^2\phi\sin\phi + \sin^4\phi\cos\phi + 3\sin^2\phi\cos\phi + 1 - 5\sin^2\phi]d\phi \\
&= \left[\cos^3\phi\right]_0^\pi + \left[\frac{\sin^5\phi}{5}\right]_0^\pi + + \left[\sin^3\phi\right]_0^\pi + \int_0^\pi \left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cos 2\pi\right) d\phi \\
&= -2 - \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4.) Lösning 1: Observera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ i alla punkter. Låt S vara ytan $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y \geq 0$ och S_1 vara ytan $(x-1)^2 + z^2 \leq 1,\ y = 0$. $S + S_1$ omsluter halvsfären $V : (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y \geq 0$. Enligt Gauss' Sats gäller nu att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = 0,$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ är en enhetsnormalvektor som pekar ut ur V. Av detta erhåller vi att

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, dS_1$$

där $\hat{\mathbf{n}}_1$ är en enhetsnormalvektor som pekar i samma riktning som den positiva y-axeln.

Vi parametriserar S_1 med $\mathbf{r}(x, z) = (x, 0, z)$ där $(x, z) \in D$ och $D : (x-1)^2 + z^2 \leq 1$. Nu har vi

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS &= \iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_z)dxdz\\ &= \iint_D (x,0,z)\cdot(0,1,0)dxdz = 0.\end{aligned}$$

Således är

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = 0.$$

Lösning 2: Vi parametriserar ytan $S:(x-1)^2+y^2+z^2=1,\quad y\geq 0$ genom ortsvektorn för punkter på ytan: $\mathbf{r}(\theta,\phi)=(1+\cos\phi\sin\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\theta)$ med $0\leq\theta\leq\pi,\quad 0\leq\phi\leq\pi$. Då erhåller vi

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \int_0^\pi\int_0^\pi \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi)\,d\theta d\phi\\ &= \int_0^\pi\int_0^\pi (1+\cos\phi\sin\theta,-2\sin\phi\sin\theta,\cos\theta)\cdot(\cos\phi\sin^2\theta,\sin\phi\sin^2\theta,\cos\theta\sin\theta)\,d\theta d\phi\\ &= \int_0^\pi\int_0^\pi (\cos\phi\sin^2\theta+\sin^3\theta[\cos^2\phi-2\sin^2\phi]+\sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta d\phi\\ &= 0\end{aligned}$$

(efter lite ihärdigt räknande).

5.) Lösning 1: Låt S vara ytan $2z=x^2+y^2,\quad x^2+y^2+z^2<3$. Ytan $2z=x^2+y^2$ skär ytan $x^2+y^2+z^2=3$ då $2z+z^2=3$, vilket ger $(z+1)^2=4$ och således är $z=-1\pm 2$. Men $2z=x^2+y^2\geq 0$ och detta medför att $z=1$. Alltså: ytorna skär varandra längs kurvan $x^2+y^2=2,\ z=1$. Låt S_1 vara ytan $x^2+y^2\leq 2,\ z=1$ och $D=\{(x,y):x^2+y^2\leq 2\}$ och $V=\{(x,y,z):2z\geq x^2+y^2,\quad x^2+y^2+z^2\leq 3\}$. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = 0,$$

eftersom $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$, och då är

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = -\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS_1$$

där $\hat{\mathbf{n}}_1$ är en enhetsnormalvektor som pekar i samma riktning som den positiva z-axeln. Om vi parametriserar S_1 med $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,1)$ med $(x,y)\in D$ då har vi

$$\begin{aligned}\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS_1 &= -\iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)\,dxdy\\ &= -\iint_D (x,y,-2)\cdot(0,0,1)\,dxdy\\ &= 2\iint_D dxdy = 4\pi.\end{aligned}$$

Lösning 2: Som ovan, låt S vara ytan $2z=x^2+y^2,\quad x^2+y^2+z^2<3$. Ytan $2z=x^2+y^2$ skär ytan $x^2+y^2+z^2=3$ då $2z+z^2=3$, vilket ger $(z+1)^2=4$ och således är $z=-1\pm 2$. Men $2z=x^2+y^2\geq 0$ och detta medför att $z=1$. Alltså: ytorna skär varandra längs kurvan

$x^2 + y^2 = 2,\ z = 1$. Låt $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Vi parametriserar S med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, \dfrac{x^2+y^2}{2})$ med $(x,y) \in D$. Normalen till ytan ska peka ut ur ytan (ut ur den kropp som ytan samt cirkeln $x^2 + y^2 = 2,\ z = 1$ omsluter) och då har vi $\hat{n} \cdot \hat{z} < 0$. Observera att $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-x, -y, 1)$ och vi väljer $\hat{n} = -\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y / |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|$. Vi har då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS &= -\iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y)\, dxdy \\
&= \iint_D (x, y, -(x^2+y^2)) \cdot (x, y, -1) dxdy \\
&= 2 \iint_D (x^2+y^2) dxdy \\
&= [\text{inför polära koordinater } x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi] \\
&= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r^3 dr d\phi \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$

6.) Vektorfältet $\mathbf{A}$ är singulärt i $(0,0,0)$. För $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ är $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Låt S beteckna den givna ytan $5x^2 + 10y^2 + 15z^2 = 100$, låt S_1 beteckna ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och låt V beteckna kroppen mellan ytorna S och S_1. Enligt Gauss' Sats gäller

$$
\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = 0,
$$

av vilket vi för att

$$
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, dS_1
$$

där $\hat{\mathbf{n}}_1$ är en enhetsnormalvektor som pekar ut ur S_1, bort från origo. På S_1 är $r = 1$ och då är $\hat{\mathbf{n}}_1 = \dfrac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}$. Således har vi

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS &= \iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x,y,z) \cdot (x,y,z)\, dS_1 \\
&= \iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2+y^2+z^2)\, dS_1 \\
&= \iint_{x^2+y^2+z^2=1} dS_1 = 4\pi
\end{aligned}
$$

ty arean av enhetssfären är 4π.