LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.
2011-01-13, kl 14.00–18.00

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.
Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.
Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

---

1. Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = 2 - x^2 - y^2$ som ligger innanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A} = (y^2 + z^2)\,\hat{x} + (x^2 + z^2)\,\hat{y} + (x^2 + y^2)\,\hat{z}$ och Γ är randen till ytstycket $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ \ x, y, z \geq 0$. Γ genomlöps moturs sett från $(17, 17, 17)$.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = yz\,\hat{x} + xz\,\hat{y} + xy\,\hat{z}$ genom ytan $x + 2y + 3z = 6,\ \ x, y, z \geq 0$ i riktningen som ges genom $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

4. Bestäm en potential för vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{(1 - \rho^2)z^2 \cos^2\phi}{(1 + \rho^2)^2}\hat{\rho} - \frac{z^2 \sin 2\phi}{1 + \rho^2}\hat{\phi} + \frac{2z\rho\cos^2\phi}{1 + \rho^2}\hat{z}$$

och beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där Γ är skärningskurvan mellan planet $x + y + z = 3$ och konen $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ med $x \geq 0$ och Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$.

5. Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där $\mathbf{A} = \left[-y + \dfrac{3x}{(3x^2 + y^2)^{1/2}}\right]\hat{x} + \left[x + \dfrac{y}{(3x^2 + y^2)^{1/2}}\right]\hat{y}$ och Γ är kurvan $x^2 + y^2 = 9$ i planet. Γ genomlöps moturs.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

ut ur ytan $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 16$.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 44 Vector analysis. TEN 1.
2010-10-23, 08.00–12.00

Each question is marked 0, 1, 2 or 3 points. An answer to a question is deemed to be good if it obtains at least 2 points. In order to obtain grade n, $n = 3, 4, 5$, on the exam you need $3n - 1$ points and n good answers.
You are allowed to use the formula sheet *Formelbladet i vektoranalys*. No calculators are allowed.
The solutions to the examination will posted on the course homepage after the examination.

---

1. calculate the area of that part of the paraboloid $z = 2 - x^2 - y^2$ som which is inside the cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Calculate the line integral $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ where $\mathbf{A} = (y^2 + z^2)\,\hat{x} + (x^2 + z^2)\,\hat{y} + (x^2 + y^2)\,\hat{z}$ and Γ is the boundary of the surface $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ \ x, y, z \geq 0$. Γ is traversed anti-clockwise as seen from $(17, 17, 17)$.

3. Calculate the flow of the vector field $\mathbf{A} = yz\,\hat{x} + xz\,\hat{y} + xy\,\hat{z}$ through the surface $x + 2y + 3z = 6,\ \ x, y, z \geq 0$ in the direction which satisfies the condition $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

4. Determine a potential for the vector field

$$\mathbf{A} = \frac{(1 - \rho^2)z^2 \cos^2\phi}{(1 + \rho^2)^2}\hat{\rho} - \frac{z^2 \sin 2\phi}{1 + \rho^2}\hat{\phi} + \frac{2z\rho\cos^2\phi}{1 + \rho^2}\hat{z}$$

and calculate the line integral $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ where Γ is the intersection of the plane $x + y + z = 3$ and the cone $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ with $x \geq 0$ and Γ is traversed anti-clockwise as seen from $(0, 0, 17)$.

5. Calculate the line integral

$$I = \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

where $\mathbf{A} = \left[-y + \dfrac{3x}{(3x^2 + y^2)^{1/2}}\right]\hat{x} + \left[x + \dfrac{y}{(3x^2 + y^2)^{1/2}}\right]\hat{y}$ and Γ is the curve $x^2 + y^2 = 9$ in the plane. Γ is traversed anti-clockwise.

6. Calculate the flow of the vector field

$$\mathbf{A} = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

outwards through the surface $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 16$.