TATA44 ösningar till tentamen 13/01/2011.

1.) Paraboloiden $z = 2 - x^2 - y^2$ skär konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ då $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x^2 - y^2$. Med $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ då är $\rho^2 + \rho - 2 = 0$ vilket ger $(\rho + 2)(\rho - 1) = 0$. Således är $\rho = 1$ ty $\rho \geq 0$. Vi betecknar den del av paraboloiden som ligger innanför konen med S, och S parametriseras av ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 2 - x^2 - y^2)$ där $(x, y) \in D$ och $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Den sökta arean är nu

$$\begin{aligned}
A &= \iint_S dS \\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\rho^2} d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho \\
&= [u = 1 + 4\rho^2] \\
&= \frac{\pi}{4} \int_1^5 u^{1/2} du \\
&= \frac{\pi}{6}[5\sqrt{5} - 1].
\end{aligned}$$

2.) En enkel räkning ger $\nabla \times \mathbf{A} = (2(y - z), 2(z - x), 2(x - y))$. Enligt Stokes' Sats gäller

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$$

där S betecknar ytstycket $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x, y, z \geq 0$. Observera att i vårt fall är $\hat{n} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \dfrac{\mathbf{r}}{3}$ eftersom S är en del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Vi har nu

$$\nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{n} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(y - z) \\ 2(z - x) \\ 2(x - y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

och då erhåller vi

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

3.) Lösning 1: Låt S_1, S_2, S_3 beteckna följande ytor: $S_1 : z = 0,\ x + 2y \leq 6, x, y \geq 0$, $S_2 : y = 0$, $x + 3z \leq 6$, $x, z \geq 0$, och $S_3 : x = 0$, $2y + 3z \leq 6$, $y, z \geq 0$. Låt V vara den kropp som $S : x + 2y + 3z = 6$ samt S_1, S_2, S_3 omsluter $(x, y, z \geq 0)$. Enligt Gauss' Sats gäller

$$\iint_{S+S_1+S_2+S_3} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = 0$$

ty $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. I denna ytintegral pekar $\hat{n}$ ut ur V. Således har vi

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_2 dS_2 + \iint_{S_3} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_3 dS_3$$

där $\hat{n}_1 = \hat{z},\ \hat{n}_2 = \hat{y},\ \hat{n}_3 = \hat{x}$. Vidare har vi

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 dS_1 &= \iint_{x+2y\leq 6,\, x,y\geq 0} (0,0,xy)\cdot(0,0,1)dxdy \\ &= \int_0^3 \left(\int_0^{6-2y} xydx\right) dy \\ &= \frac{27}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_2 dS_2 &= \iint_{x+3z\leq 6,\, x,z\geq 0} (0,xz,0)\cdot(0,1,0)dxdz \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{6-3z} xzdx\right) dz \\ &= 6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_3} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_3 dS_3 &= \iint_{2y+3z\leq 6,\, y,z\geq 0} (yz,0,0)\cdot(1,0,0)dydz \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{3-\frac{3z}{2}} yzdy\right) dz \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Slutligen erhåller vi

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = 21.$$

Lösning 2: Parametrisera ytan $S: x+2y+3z=6$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 2-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3})$ där $(x,y)\in D: x+2y\leq 6,\ x,y\geq 0$. Då har vi

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)dxdy\\
&= \iint_D \left(2y-\frac{xy}{3}-\frac{2y^2}{3}, 2x-\frac{x^2}{3}-\frac{2xy}{3}, xy\right)\cdot\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)dxdy\\
&= \frac{2}{9}\int_0^3\left(\int_0^{6-2y}\left[6x+3y-x^2-y^2+2xy\right]dx\right)dy\\
&= \frac{2}{9}\int_0^3\left[3x^2+3xy-\frac{x^3}{3}-xy^2+x^2y\right]_{x=0}^{x=6-2y}dy\\
&= \frac{2}{9}\int_0^3\left[36+54y-48y^2+\frac{26y^3}{3}\right]dy\\
&= \frac{2}{9}\left[36y+27y^2-16y^3+\frac{13y^4}{6}\right]_0^3\\
&= 21.
\end{aligned}$$

4.) I cylinder koordinater har vi

$$\mathbf{A} = \nabla\Phi(\rho,\phi,z)$$

av vilket det följer att

$$\Phi'_\rho = \frac{(1-\rho^2)z^2\cos^2\phi}{(1+\rho^2)^2},\quad \Phi'_\phi = -\rho\frac{z^2\sin 2\phi}{1+\rho^2},\quad \Phi'_z = \frac{2z\rho\cos^2\phi}{1+\rho^2}.$$

Ekvationen $\Phi'_z = \dfrac{2z\rho\cos^2\phi}{1+\rho^2}$ ger $\Phi = \dfrac{z^2\rho\cos^2\phi}{1+\rho^2} + g(\rho,\phi)$. Insättning av detta uttryck i $\Phi'_\phi = -\rho\dfrac{z^2\sin 2\phi}{1+\rho^2}$ ger $g'_\phi(\rho,\phi) = 0$ och då är $\Phi = \dfrac{z^2\rho\cos^2\phi}{1+\rho^2} + g(\rho)$. Insättning av detta i $\Phi'_\rho = \dfrac{(1-\rho^2)z^2\cos^2\phi}{(1+\rho^2)^2}$ ger $g'_\rho = 0$ och då erhåller vi att

$$\Phi = \frac{z^2\rho\cos^2\phi}{1+\rho^2} + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Kurvan Γ är skärningen mellan $x+y+z=3$ och $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ med $x \geq 0$ och således ligger ändpunkterna i planet $x=0$: startpunkten P motsvarar $\phi = -\pi/2$ och slutpunkten Q svara mot $\phi = \pi/2$. Eftersom $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ då är

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(Q) - \Phi(P) = 0$$

ty $\phi = -\pi/2$ i P och $\phi = \pi/2$ i Q.

5.) Vektorfltäet $\mathbf{A}$ är summan av två vektorfält: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ där

$$\mathbf{A}_1 = -y\hat{x} + x\hat{y},\qquad \mathbf{A}_2 = \frac{3x}{(3x^2+y^2)^{1/2}}\hat{x} + \frac{y}{(3x^2+y^2)^{1/2}}\hat{y}.$$

Vi har

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{A}_1\cdot d\mathbf{r} + \int_\Gamma \mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{r}.$$

Vi har enligt Greens Sats

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \iint_{x^2+y^2\leq 9} 2dxdy = 18\pi.$$

För att behandla $\mathbf{A}_2$ låt Γ_1 vara kurvan $3x^2 + y^2 = 9$ (som ligger innanför Γ) och beteckna med D_1 området mellan Γ och Γ_1. Enligt Greens Sats har vi då att

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \iint_{D_1} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(3x^2+y^2)^{1/2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x}{(3x^2+y^2)^{1/2}}\right)\right] dxdy = 0$$

av vilket det följer att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}$$

där både Γ och Γ_1 genomlöps medurs. Parametrisera Γ_1 med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \sqrt{3}\cos\phi\,\hat{x} + 3\sin\phi\,\hat{y}$ med $\phi : 0 \to 2\pi$. Vi har då $\mathbf{A}_2(\mathbf{r}(\phi)) = \sqrt{3}\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$ och kurvintegralen är nu

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \sqrt{3}\cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{3}\sin\phi \\ 3\cos\phi \end{bmatrix} d\phi \\ &= 0.\end{aligned}$$

och vi erhåller

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 18\pi.$$

6.) Lösning 1: Vektorfältet är singulärt i $(0,0,0)$. I rymdpolära koordinater har vi

$$\mathbf{A} = \nabla(\frac{1}{r}) = -\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Vi har då

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(-\sin\theta) = 0$$

för $r \neq 0$. Sätt $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och låt V beteckna kroppen mellan S_1 och paraboloiden $x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 9$. Enligt Gauss' Sats har vi då att

$$\iint_{x^2+4y^2+9z^2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 0$$

där normalerna $\hat{n}$ och $\hat{n}_1$ pekar ut ur V. Vi kan då skriva det sköta flödet som

$$\Phi = \iint_{x^2+4y^2+9z^2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1$$

där $\hat{n}_1$ nu pekar ut ur sfären S_1. Vi har $dS_1 = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ med $0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ och $\hat{n}_1 = \hat{r}$. På S_1 är $\mathbf{A} = -\hat{r}$ (se ovan) och således har vi

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 dS_1\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}(-\hat{r}\cdot\hat{r}\sin\theta\, d\theta\right) d\phi\\ &= -2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\\ &= -4\pi.\end{aligned}$$

Lösning 2: Vi kan skriva

$$\mathbf{A} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

där $\mathbf{r} = (x, y, z)$ och $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Sätt $S : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 16$ och $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Enligt Gauss' Sats gäller att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV$$

där V är området mellan S_1 och S och $\hat{n}$ pekar ut ur V. En enkel räkning ger $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ och i synnerhet inom V. Således har vi

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 dS_1$$

där pekar ut ur S_1 bort från origo. På S_1 är $r = 1$ och $\hat{n}_1 = \hat{r} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ ty S_1 är en sfär. Då erhåller vi att

$$\mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} = -1/r^2 = -1,$$

och då är

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = -\iint_{S_1} dS_1 = -4\pi$$

ty arean av en sfär med radie R är $4\pi R^2$.