TATA44 Lösningar till tentamen 23/10/2009.

1.) Ytan $2z = x^2 + y^2$ skär sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ då $z^2 + 2z = 3$ som ger $(z+1)^2 = 4$. Då är $z = -1 \pm 2$ och vi erhåller $z = 1$ eftersom $z \geq 0$. Parametrisera ytan $2z = x^2 + y^2$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, \rho^2/2) = \rho\hat{\rho} + \dfrac{\rho^2}{2}\hat{z}$ (cylinderkoordinater) och vi har $0 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Observera att $\mathbf{r}'_\rho = \hat{\rho} + \rho\hat{z}$ och $\mathbf{r}'_\phi = \rho\hat{\phi}$ vilket ger

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= (\hat{\rho} + \rho\hat{z}) \times (\rho\hat{\phi}) \\ &= -\rho^2\hat{\rho} + \rho\hat{z}.\end{aligned}$$

Här har vi använt oss av följande kalkyl: $\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$ vilket gör att $\dfrac{d\hat{\rho}}{d\rho} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} = \hat{\phi}$. Vidare utgör $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$ en högerorienterad ortonormerad bas vilket ger oss $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z},\ \hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho},\ \hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\phi}$.

Låt D vara mängden $(\rho,\phi) :\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ 0\phi \leq 2\pi$. Ytans area är nu

$$\begin{aligned}A &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi|\,d\rho\,d\phi \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho^4}\,d\phi \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho \\ &= \frac{2\pi}{3}\left[(1+\rho^2)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\pi}{3}[3\sqrt{3} - 1].\end{aligned}$$

2.) Lösning 1: Kurvan Γ är enkel och sluten och $\mathbf{A} = -(y+1)\hat{x} + (x+1)\hat{y}$ är ett C^1-vektorfält. Då har vi att

$$I = \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n}\,dS$$

där S är den ytan som Γ omsluter, och Γ genomlöps i positiv riktning. I vårt fall är S är den del av planet $2x + 2y + z = 2$ som ligger innanför parabloiden $z = x^2 + y^2$, d.v.s. i området $z \geq x^2 + y^2$. Planet skär ytan $z = x^2 + y^2$ då $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$ som ger $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$ och då är S den del av planet $2x + 2y + z = 2$ där $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$. Att Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0,0,17)$ betyder att Γ genomlöps i positiv riktning (med S till vänster om den riktningen). Vi parametriserar S med hjälp av ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 2(1-x-y))$ för $(x,y) \in D$ där $D :\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$ och då har vi

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n} dS \\
&= \iint_D (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dxdy \\
&= \iint_D (0,0,2) \cdot (2,2,1) dxdy \\
&= 2 \iint_D \, dxdy \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

eftersom D är en cirkelskiva med radie 2.

Lösning 2: Vi har att Γ är kurvan $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4,\ z = 2(1-x-y)$ (se ovan) och vi parametriserar Γ genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = (-1 + 2\cos\phi, -1 + 2\sin\phi, 6 - 4(\cos\phi + \sin\phi))$ där $0\phi \leq 2\pi$. På Γ har vi

$$
\mathbf{A} = -(y+1)\,\hat{x} + (x+1)\,\hat{y} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.
$$

Γ genomlöps moturs sett från $(0,0,17)$ betyder att $\phi : 0 \to 2\pi$. Nu har vi

$$
\begin{aligned}
I &= \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\phi) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\sin\phi, 2\cos\phi, 0) \cdot (-2\sin\phi, 2\cos\phi, 4(\sin\phi - \cos\phi))\, d\phi \\
&= 4 \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 8\pi.
\end{aligned}
$$

3.) $\mathbf{A}$ är ett potentialfält om det finns ett skalarfält Φ med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$. I sfäriska koordinater betyder detta att

$$
\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi} = \frac{2r\cos\phi}{(1+r^2)^2}\hat{r} + \frac{\sin\phi}{r(1+r^2)\sin\theta}\hat{\phi},
$$

vilket ger ekvationssystemet

$$
\Phi'_r = \frac{2r\cos\phi}{(1+r^2)^2}, \quad \Phi'_\theta = 0, \quad \Phi'_\phi = \frac{\sin\phi}{(1+r^2)}.
$$

Den tredje ekvationen och den andra ekvationen ger

$$
\Phi(r,\phi) = -\frac{\cos\phi}{(1+r^2)} + g(r),
$$

och insättning i den första ekvationen ger

$$
g'(r) = 0
$$

vilket ger

$$\Phi(r,\phi) = -\frac{\cos\phi}{(1+r^2)} + C.$$

Kurvan Γ har startpunkt $(r,\theta,\phi) = (1,\pi/2,\pi/4)$ och slutpunkt $(r,\theta,\phi) = (4,\pi,\pi/4)$. Eftersom $\mathbf{A}$ är ett potentialfält med potential

$$\Phi = -\frac{\cos\phi}{(1+r^2)} + C$$

så har vi

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \Phi(4,\pi,\pi/4) - \Phi(1,\pi/2,\pi/4)\\ &= \frac{15}{34\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

4.) Planet skär cylindern $(x-2)^2+y^2=1$ i kurvan $\Gamma:\ (x-2)^2+y^2=1,\ z=-x$. Då är Γ en enkel och sluten C^1-kurva och $\mathbf{A} = -y^3\hat{x} + (x-2)^3\hat{y}$ är ett C^1-vektorfält. Då har vi att

$$I = \int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{n}dS$$

där S är den ytan som Γ omsluter, och Γ genomlöps i positiv riktning. I vårt fall är S den del av planet $x+z=0$ som ligger innanför cylindern $(x-2)^2+y^2=1$. Att Γ genomlöps moturs sett från punkten $(2,0,34)$ betyder att Γ genomlöps i positiv riktning (med S till vänster om den riktningen). Vi parametriserar S med hjälp av ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,-x)$ för $(x,y)\in D$ där $D:\ (x-2)^2+y^2\le 1$. En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y = (1,0,1)$. Ytan S ska ligga till vänster om Γ då enhetsvektorn $\hat{n}$ till S transporteras längs Γ då Γ genomlöps moturs sett från $(2,0,34)$. Då måste enhetsnormalen $\hat{n}$ ha positiv $\hat{z}$-komponent. Vi väljer $\hat{n} = (\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)/|\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y|$ och då har vi

$$\begin{aligned}I &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{n}dS\\ &= \iint_D (\nabla\times\mathbf{A})\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)dxdy\\ &= \iint_D (0,0,3(x-2)^2+3y^2)\cdot(1,0,1)dxdy\\ &= 3\iint_D \left[(x-2)^2+y^2\right]dxdy\\ &= 3\int_0^1\left(\int_0^{2\pi} r^3 d\phi\right)dr\\ &= \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

där vi har gjort variabelbytet $x = 2+r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$ med $0\le r\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi$ i den näst sista integralen.

5.)Lösning 1: Vektorfältet $\mathbf{A} = (x,y,-2z)$ är ett C^1-vektorfält och ytan $S: x^2+(y-1)^2+z^2 = 1,\ z\ge 0$ är C^1. Låt S_1 vara den yta som definieras som $S_1:\ x^2+(y-1)^2\le 1,\ z=0$. Enligt Gauss' sats gäller då att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$$

där V är den kropp som avgränsas av S och S_1 och $\hat{n}$ pekar ut ur V. Vi har $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ och således har vi att flödet Φ av $\mathbf{A}$ ut genom S (bort från origo) är

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_1\,dS_1$$

där $\hat{n}_1$ pekar nu in i kroppen V. Eftersom S_1 är i xy-planet då är $\hat{n}_1 = \hat{z}$, och då är $\mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 = (x, y, -2z)\cdot(0, 0, 1) = -2z = 0$ på S_1. Således är flödet $\Phi = 0$.

Lösning 2: Ytan kan parametriseras genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi) = (\cos\phi\sin\theta, 1{+}\sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$, med $0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Låt D vara området $D:\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Vi har $\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi = \sin\theta(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$. Om vi beräknar flödet genom S i riktning $\hat{r}$ (ut ur S, bort från origo) då har vi

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi)d\theta\,d\phi \\
&= \iint_D \sin\theta(\cos\phi\sin\theta, 1+\sin\phi\sin\theta, -2\cos\theta)\cdot(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\phi}[\sin^3\theta + \sin\phi\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta]d\phi\right)d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\pi/2}[\sin^3\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta]d\theta \\
&= \pi\int_0^{\pi/2}[1-3\cos^2\theta]\sin\theta\,d\theta \\
&= \left[\cos^3\theta - \cos\theta\right]_0^{\pi/2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

6.) Vektorfältet är singulärt på z-axeln, där $\rho = 0$. Vidare har vi att $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ i de punkter där $\rho\neq 0$. Låt S beteckna ytan $x^2+y^2+z^2 = 1,\ z > 0$ och låt S_ϵ vara ytan $x^2+y^2+z^2 = 1,\ z > 0,\ x^2+y^2 > \epsilon^2$. Vidare sätt $C_\epsilon : x^2+y^2 = \epsilon^2,\ 0\le z\le\sqrt{1-\epsilon^2}$ och $L_\epsilon : \epsilon^2 < x^2+y^2 \le 1,\ z = 0$. Kroppen V_ϵ är den kropp som avgränsas av $S_\epsilon,\ C_\epsilon,\ L_\epsilon$ och inom V_ϵ är $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$. När $\epsilon\to 0$ då har vi

$$\iint_{S_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{n}_\epsilon dS_\epsilon \to \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS,$$

vilket är det sökta flödet. Enligt Gauss' sats har vi

$$\iint_{S_\epsilon+C_\epsilon+L_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \iiint_{V_\epsilon}\nabla\cdot\mathbf{A}dV = 0,$$

där enhetsnormalen $\hat{n}$ pekar ut ur kroppen på var och en av delytorna. Av detta följer att

$$\iint_{S_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \iint_{C_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{n}_C dC + \iint_{L_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{n}_L dL,$$

där dC, dL är de respektive area måtten och $\hat{n}_C$ är enhetsnormalen till C_ϵ som pekar ut från z-axeln och $\hat{n}_L$ är enhetsnormalen till L_ϵ som pekar upp i positiv z-riktning.

På L_ϵ har vi ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,0) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, 0)$ med $\epsilon < \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$, och på L_ϵ är $\mathbf{A} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$. Eftersom $\hat{n}_L = \hat{z}$ då är $\mathbf{A}\cdot\hat{n}_L = 0$ på L_ϵ. Således har vi

$$\iint_{L_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_L dL = 0.$$

På C_ϵ har vi ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi,z) = (\epsilon\cos\phi, \epsilon\sin\phi, z)$ med $0 \leq z \leq \sqrt{1-\epsilon^2},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$, och på C_ϵ är $\mathbf{A} = (\cos\phi, \sin\phi, \frac{z}{\epsilon})$. Låt D vara området $D:\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-\epsilon^2},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har

$$\begin{aligned}\iint_{C_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_C &= \iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z)d\phi\, dz\\ &= \iint_D (\cos\phi, \sin\phi, \frac{z}{\epsilon})\cdot(\epsilon\cos\phi, \epsilon\sin\phi, 0)d\phi\, dz\\ &= \epsilon\iint_D d\phi\, dz\end{aligned}$$

$$= 2\pi\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}.$$

Vi erhåller nu

$$\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \iint_{C_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_C dC = 2\pi\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}$$

av vilket vi får

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \lim_{\epsilon\to 0}\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = 0.$$

Flödet genom S är då $\Phi = 0$.