TATA44 Lösningar 24/8/2012.

1.) Låt S vara den del av $x^2+y^2+z^2=2$ innanför cylindern $x^2+y^2=1$. Inför cylinderkoordinater. Parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi)=(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi,\sqrt{2-\rho^2})$ som man kan skriva som $\mathbf{r}(\rho,\phi)=\rho\,\hat{\rho}+\sqrt{2-\rho^2}\,\hat{z}$. Vi har $(\rho,\phi)\in D$ med $D: 0\le\rho\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi$ och

$$\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi=\left(\hat{\rho}-\frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}\hat{z}\right)\times(\rho\hat{\phi})=\frac{\rho^2}{\sqrt{2-\rho^2}}\hat{\rho}+\rho\hat{z}$$

och den sökta arean är

$$\begin{aligned}
A&=\iint_S dS\\
&=\iint_D |\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi|d\rho d\phi\\
&=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\rho^4}{2-\rho^2}+\rho^2\,d\phi}\right)d\rho\\
&=\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}d\phi\right)d\rho\\
&=2\sqrt{2}\pi\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}d\rho\\
&=2\sqrt{2}\pi\left[-\sqrt{2-\rho^2}\right]_0^1\\
&=2\sqrt{2}\pi[\sqrt{2}-1].
\end{aligned}$$

2.) Lösning 1: Inför cylinderkoordinater: $x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ z=0z$ och då parametriseras ytan S genom $\mathbf{r}(\rho,\phi)=(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi,4-\rho^2)$ med parameter området D som ges genom $D:\sqrt{2}\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi$. På ytan S har vi

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2\rho^3\cos^2\phi\sin\phi\\ -\rho^3\cos\phi\sin^2\phi\\ (1-2\rho^2\cos\phi\sin\phi)(4-\rho^2)\end{bmatrix}.$$

Vidare är $\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi=(2\rho^2\cos\phi,2\rho^2\sin\phi,\rho)$.

Det sökta flödet är

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS &= \iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)d\rho\, d\phi \\
&= \iint_D \begin{bmatrix} 2\rho^3\cos^2\phi\sin\phi \\ -\rho^3\cos\phi\sin^2\phi \\ (1-2\rho^2\cos\phi\sin\phi)(4-\rho^2) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2\rho^2\cos\phi \\ 2\rho^2\sin\phi \\ \rho \end{bmatrix} d\rho\, d\phi \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\int_0^{2\pi}[4\rho^5\cos^3\phi\sin\phi - 2\rho^5\cos\phi\sin^3\phi - 2\rho^3(4-\rho^2)\cos\phi\sin\phi + 4\rho - \rho^3]d\phi\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}(4\rho-\rho^3)d\rho \\
&= 2\pi\left[2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right]_{\sqrt{2}}^{2} \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

eftersom

$$
\int_0^{2\pi}\cos^3\phi\sin\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi}\cos\phi\sin^3\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi}\cos\phi\sin\phi\, d\phi = 0.
$$

Lösning 2: En enkel räkning ger $\nabla\cdot\mathbf{A} = 1$ och vi ser att $\mathbf{A}$ är ett C^1-vektorfält. Låt S beteckna den givna ytan och $L_1 : x^2+y^2\le 2,\ z=2$ och $L_2 : x^2+y^2 \le 4,\ z=0$. Då är $S+L_1+L_2$ är en sluten yta som omsluter ett område V. Enligt Gauss' sats har vi nu

$$
\iint_{S+L_1+L_2}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \iiint_V dV
$$

där normalen $\hat{n}$ pekar ut ur V (enligt Gauss' sats). Vi har då

$$
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS + \iint_{L_1}\mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 dL_1 + \iint_{L_2}\mathbf{A}\cdot\hat{n}_2 dL_2 = \iiint_V dV.
$$

Observera att på L_2 är $\hat{n}_2 = -\hat{z}$ med $z=0$ och då är $\mathbf{A}\cdot\hat{n}_2 = 0$, som ger $\iint_{L_2}\mathbf{A}\cdot\hat{n}_2 dL_2 = 0$. På L_1 är $\hat{n}_1 = \hat{z}$ och $z=2$ vilket ger $\mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 = 2(1-2xy)$ och vi får då

$$
\begin{aligned}
\iint_{L_1}\mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 dL_1 &= 2\iint_{L_1}(1-2xy)dxdy \\
&= 2\iint_{L_1} dxdy \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

eftersom L_1 är en cirkel med radie $\sqrt{2}$ och

$$
\begin{aligned}
\iint_{L_1} xydxdy &= [x=r\cos\phi,\ y=r\sin\phi,\ 0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi} r^3\cos\phi\sin\phi\, d\phi\right)dr = 0.
\end{aligned}
$$

För att beräkna $\iiint_V dV$, som är volymen av området V, observera att vi kan skriva

$$\iiint_V dV = \iiint_{V_1} dV_1 - \iiint_{V_2} dV_2$$

där V_1 är området mellan xy-planet ($z = 0$) och $z = 4 - (x^2 + y^2)$, med $x^2 + y^2 \leq 4$, och V_2 är området mellan planet $z = 2$ och $z = 4 - (x^2 + y^2)$, med $x^2 + y^2 \leq 2$. Vi har

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_1} dV_1 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \left(\int_0^{4-(x^2+y^2)} dz \right) dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} [4 - (x^2 + y^2)] dxdy \\
&= [x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= 2\pi \int_0^2 [4 - r^2] r dr \\
&= 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 \\
&= 8\pi.
\end{aligned}$$

Vidare är

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_2} dV_2 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2} \left(\int_2^{4-(x^2+y^2)} dz \right) dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 2} [2 - (x^2 + y^2)] dxdy \\
&= [x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= 2\pi \int_0^2 [2 - r^2] r dr \\
&= 2\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Av detta erhåller vi att

$$\iiint_V dV = 6\pi$$

och då har vi

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS + 4\pi = 6\pi$$

vilket ger att flödet genom S är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = 2\pi.$$

3.) Lösning 1: En enkel räkning visar att $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Lägg till Γ den rätta linjen $\Gamma_1 :\ y+z=0$ med ändpunkterna i $(0,-1,1)$ och $(0,1,-1)$ så att $\Gamma + \Gamma_1$ genomlöps medurs sett från punkter på den positiva z-axeln (då är startpunkten $(0,1,-1)$ och slutpunkten $(0,-1,1)$ på Γ_1). Om S är det plana området i planet $x+y+z=0$ som begränsas av $\Gamma+\Gamma_1$ då har vi, enligt Stokes' Sats,

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} dS = 0$$

vilket ger att

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= -\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\
&= [\mathbf{r}(z) = (0,-z,z),\ z : -1 \to 1] \\
&= -\int_{-1}^{1} \mathbf{A}(\mathbf{r}(z)) \cdot \mathbf{r}'(z) dz \\
&= -\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 1+z^2 \\ -2z^2 \\ z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} dz \\
&= -3\int_{-1}^{1} z^2 dz \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Observera att $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ vilket gör att $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ. detta ger

$$\Phi'_x = 1+z^2, \quad \Phi'_y = 2yz, \quad \Phi'_z = 2xz + y.$$

Ekvationen $\Phi'_x = 1+z^2$ ger $\Phi = x(1+z^2)+g(y,z)$ och insättning av detta i ekvationen $\Phi'_y = 2yz$ ger $g'_y(y,z) = 2yz$ vilket ger nu $g(y,z) = y^2z + h(z)$ och $\Phi = x(1+z^2) + y^2z + h(z)$. Insättning i den sista ekvationen $\Phi'_z = 2xz + y$ ger $h'(z) = 0$ och slutligen erhåller vi att

$$\Phi = x(1+z^2) + y^2z + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Planet $x+y+z=0$ skär ellipsoiden i en kurva där $x \geq 0$ och start- och slutpunkten ligger på $x=0$. Då är $y+z=0$ vilket ger $y=-z$. Insättning i ellipsoidens ekvation ger $z^2=1$ och då är $z=\pm 1$. Startpunkten har positiv z-koordinat, och då måste $(0,-1,1)$ vara kurvans startpunkt, medan $(0,1,-1)$ är kurvans slutpunkt. Eftersom $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ vi har

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(0,1,-1) - \Phi(0,-1,1) = -2.$$

4.) Vilkoret för att $\mathbf{A}$ har en potential är $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ och detta ger ekvationssystemet

$$f'_x(x,y) = 2, \quad f'_y(x,y) = 2y$$

som ger $f(x,y) = 2x + y^2 + C$. Vilkoret $f(0,0) = 0$ ger nu $f(x,y) = 2x + y^2$ i detta fall måste $\mathbf{A} = \nabla\Psi(x,y,z)$ för någon potential $\Psi(x,y,z)$ och vi har ekvationssystemet

$$\Psi'_x = z^2 + 2xy + 2z + y, \quad \Psi'_y = x^2 + 2yz + x, \quad \Psi'_z = 2x + y^2 + 2xz.$$

Ekvationen $\Psi'_x = z^2 + 2xy + 2z + y$ ger $\Psi = x^2y + xy + 2xz + xz^2 + g(y,z)$. Insättning i $\Psi'_y = x^2 + 2yz + x$ ger nu $g'_y(y,z) = 2yz$ som ger $g(y,z) = y^2z + h(z)$ och vi får $\Psi = x^2y + xy + 2xz + xz^2 + y^2z + h(z)$. Insättning av detta i ekvationen $\Psi'_z = 2x + y^2 + 2xz$ ger $h'(z) = 0$ och vi erhåller

$$\Psi = x^2y + xy + 2xz + xz^2 + y^2z + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Vektorfältet $\mathbf{A}$ är ett potentialfält. Med $\mathbf{A} = \nabla\Phi(\rho,\phi,z)$, uttryckt i cylinderkoordinater, har vi

$$\Phi'_\rho = 2\rho\cos\phi, \quad \frac{1}{\rho}\Phi'_\phi = -\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\phi, \quad \Phi'_z = 0$$

som ger att $\Phi = \Phi(\rho,\phi)$ med

$$\Phi'_\rho = 2\rho\cos\phi, \quad \Phi'_\phi = -(\rho^2+1)\sin\phi.$$

Ekvationen $\Phi'_\rho = 2\rho\cos\phi$ ger $\Phi(\rho,\phi) = \rho^2\cos\phi + g(\phi)$ och insättning i $\Phi'_\phi = -(\rho^2+1)\sin\phi$ ger $g'(\phi) = -\sin\phi$ vilket ger $h(\phi) = \cos\phi + C$ och vi erhåller $\Phi = (\rho^2+1)\cos\phi + C$.

Kurvans startpunkt är i $(\sqrt{2},0)$ och slutpunkten är $(-\sqrt{2},0)$. Punkten $(\sqrt{2},0)$ svarar mot $\rho = \sqrt{2}$, $\phi = 0$ medan punkten $(-\sqrt{2},0)$ svarar mot $\rho = \sqrt{2}$, $\phi = \pi$. Eftersom $\mathbf{A}$ är ett potentialfält med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ vi har

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(\sqrt{2},\pi) - \Phi(\sqrt{2},0) = -6.$$

6.) Lösning 1: Låt S beteckna ytan $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$. Vi parametriserar S med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\,\hat{\rho} + (4-\rho)\,\hat{z}$ i cylinderkoordinater. Vi vet att $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$ med $0 \le z \le 2$ som ger $z = 4-\rho$ med $2 \le \rho \le 4$ och $0 \le \phi \le 2\pi$. På S har vi $\mathbf{A} = \dfrac{1}{\rho^4}[\rho\,\hat{\rho} + (4-\rho)\,\hat{z}]$. Låt D beteckna området $D : 2 \le \rho \le 4,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. En normal vektor till ytan är $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - \hat{z}) \times (\rho\hat{\phi}) = \rho(\hat{\rho} + \hat{z})$ som uppfyller villkoret $(\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi)\cdot\hat{z} > 0$. Vi har nu

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS &= \iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi d\rho)\,d\phi \\
&= \iint_D \frac{1}{\rho^4}[\rho\,\hat{\rho} + (4-\rho)\,\hat{z}]\cdot(\rho[\hat{\rho}+\hat{z}])d\rho\,d\phi \\
&= \int_2^4 \left(\int_0^{2\pi} \frac{4}{\rho^3}d\phi\right)d\rho \\
&= 8\pi\int_2^4 \frac{1}{\rho^3}d\rho \\
&= 4\pi\left[-\frac{1}{\rho^2}\right]_2^4 \\
&= \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Låt S beteckna ytan $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$. Vi har $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$ i de punkter där $x^2+y^2 \neq 0$. Låt S_1 vara cylindern $x^2+y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 2$ och L vara ytan $4 \leq x^2+y^2 \leq 16$, $z = 0$ och låt V beteckna området som omslutas av $S + S_1 + L$. Observera att $S + S_1 + L$ är sluten och att inom V är $\mathbf{A}$ ett C^1-vektorfält. Enligt Gauss' sats har vi då att

$$\iint_{S+S_1+L} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = -\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdydz.$$

Inför cylinderkoordinater. Då ges $\mathbf{A}$ genom $\mathbf{A} = \dfrac{1}{\rho^4}[\rho\,\hat{\rho} + z\hat{z}]$ och S_1 parametriseras genom ortsvetorn $\mathbf{r}(\phi, z) = 2\hat{\rho} + z\,\hat{z}$ med parametrar $(\phi, z) \in D$ och $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 2$. Vi har

$$\iint_{S+S_1+L} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \iint_L \mathbf{A} \cdot \hat{n}_L dL$$

och alla normaler pekar ut ur V enligt Gauss' sats.

På L är $z = 0$ och $\hat{n}_L = -\hat{z}$ vilket gör att på L vi har $\mathbf{A} \cdot \hat{n}_L = \dfrac{z}{\rho^4} = 0$.

På S_1 har vi $\hat{n}_1 = -\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z / \left|\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z\right| = -\hat{\rho}$ eftersom $\hat{n}_1$ pekar in mot z-axeln (och ut ur V). Då har vi

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 &= -\iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) d\phi\, dz \\
&= -\iint_D \frac{1}{16}(2\hat{\rho} + z\hat{z}) \cdot (2\hat{\phi} \times \hat{z}) d\phi\, dz \\
&= -\iint_D \frac{1}{16}(2\hat{\rho} + z\hat{z}) \cdot (2\hat{\rho}) d\phi\, dz \\
&= -\frac{1}{4}\iint_D d\phi\, dz \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

Således erhåller vi

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS - \pi = \iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdydz.$$

V definieras av olikheterna $0 \leq z \leq 4 - \rho,\ 2 \leq \rho \leq 4,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ i cylinderkoordinater och vi har då

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdydz &= -\iint_{4\le x^2+y^2\le 16} \left(\int_0^{4-\sqrt{x^2+x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dz \right) dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ 2\le\rho\le 4,\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= -\int_2^4 \left(\int_0^{2\pi} \frac{4-\rho}{\rho^4} d\phi \right) \rho\, d\rho \\
&= -2\pi \int_2^4 \left(\frac{4}{\rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \right) d\rho \\
&= -2\pi \left[-\frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \right]_2^4 \\
&= -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Vi har nu

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS - \pi = -\frac{\pi}{4},$$

som ger

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \frac{3\pi}{4}.$$