TATA44 Lösningar till tentamen 23/10/2010.

1.) Låt S beteckna den del av konen $z = 3-2\sqrt{x^2+y^2}$ som är innanför paraboloiden $z = x^2+y^2$. Konen skär paraboloiden då $x^2+y^2 = 3-2\sqrt{x^2+y^2}$ och med $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ så har vi $\rho^2 = 3-2\rho$ eller $\rho^2+2\rho-3 = 0$ vilket ger $(\rho-1)(\rho+3) = 0$ och således är $\rho = 1$. Av detta följer att S är den del av konen för vilken $1 \leq z \leq 3$ och $x^2+y^2 \leq 1$. Sätt $D : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi parametriserar S med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, 3-2\rho)$ där $(\rho,\phi) \in D$. Observera att $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (2\rho\cos\phi, 2\rho\sin\phi, \rho)$. Arean av S är

$$\begin{aligned} A &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi|\, d\rho\, d\phi \\ &= \sqrt{5}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho\, d\phi\right) d\rho \\ &= \pi\sqrt{5}. \end{aligned}$$

2.) Enligt Stokes Sats har vi

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{n}\, dS$$

där S är den del av planet $x+y+z = 3$ som avgränsas av Γ (och är innanför cylindern $x^2+y^2 = 9$) och $\hat{n}$ är en enhetsnormal till S. Γ genomlöps moturs sett från $(0,0,51)$ och $\hat{n}$ måste då ha positiv z-komponent så att S ligger till vänster om den riktning i vilken Γ genomlöps. Vi parametriserar S med hjälp av ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,3-x-y)$ med $(x,y) \in D$ där $D : x^2+y^2 \leq 9$. Vi har $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (1,1,1)$ och $\nabla\times\mathbf{A} = (0,-2y,2z) = (0,-2y,6-2x-2y)$ på S. Nu får vi

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{n}\, dS \\ &= \iint_D (\nabla\times\mathbf{A})\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)\, dx\, dy \\ &= \iint_D (0,-2y,6-2x-2y)\cdot(1,1,1)\, dx\, dy \\ &= \iint_D (6-2x-4y) dx\, dy \\ &= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ \ 0 \leq \rho \leq 3,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\ &= \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} [6-2\rho\cos\phi-4\rho\sin\phi]\, d\phi\right) \rho\, d\rho \\ &= 54\pi. \end{aligned}$$

3.) Låt V vara den kropp som avgränsas av ytan $S : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x,y,z \geq 0$ och sidoytorna $S_1 : x^2+y^2 = 1,\ x,y \geq 0,\ z = 0,\ S_2 : y^2+z^2 = 1,\ y,z \geq 0,\ x = 0,\ S_3 : x^2+z^2 = 1,\ x,z \geq 0,\ y = 0$. Vi söker flödet $\Phi = \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}\, dS$ där $\hat{n}$ pekar ut från V (ty då är $\hat{n}\cdot\hat{z} \geq 0$). Enligt Gauss Sats har vi

$$\iint_{S+S_1+S_2+S_3} \mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$$

för flödet av $\mathbf{A}$ ut ur V. På S_1 är $\hat{n}=(0,0,-1)$ medan $\mathbf{A}=(xy^2,0,0)$ och då är $\mathbf{A}\cdot\hat{n}=0$ på S_1. På S_2 är $\hat{n}=(-1,0,0)$ medan $\mathbf{A}=(0,yz^2,0)$ och då är $\mathbf{A}\cdot\hat{n}=0$ på S_2. På S_3 är $\hat{n}=(0,-1,0)$ medan $\mathbf{A}=(0,0,x^2z)$ och då är $\mathbf{A}\cdot\hat{n}=0$ på S_3. Av detta följer att $\displaystyle\iint_{S_1+S_2+S_3}\mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS=0$ och vi får då att flödet är

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV\\
&= \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz\\
&= [x=r\cos\phi\sin\theta,\ y=r\sin\phi\sin\theta,\ z=\cos\theta,\ \ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le\pi/2]\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 r^4dr\\
&= \frac{\pi}{10}.
\end{aligned}$$

4.) $\mathbf{A}$ är ett potentialfält om det finns en funktion Φ med $\mathbf{A}=\nabla\Phi$. I sfäriska polära koordinater får vi då att

$$\mathbf{A} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\,\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\,\hat{\phi}$$

av vilket vi erhåller ekvationssytemet

$$\Phi'_r = \frac{(1-r^2)\cos\phi\sin\theta}{(1+r^2)^2},\quad \Phi'_\theta = \frac{r\cos\phi\cos\theta}{1+r^2},\quad \Phi'_\phi = -\frac{r\sin\phi\sin\theta}{1+r^2}.$$

Integrering av den tredje ekvationen ger

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{r\cos\phi\sin\theta}{1+r^2} + g(r,\theta).$$

Insättning av detta i den andra ekviationen ger $g'_\theta=0$ vilket ger

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{r\cos\phi\sin\theta}{1+r^2} + g(r).$$

Insättning av detta uttryck i den första ekvationen ger $g'(r)=0$ och vi erhåller då

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \frac{r\cos\phi\sin\theta}{1+r^2} + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Kurvan Γ är skärningen mellan planet $x=y$ och ytan $x^2+4y^2+5z^2=25$ med $x,y,z\ge 0$. Då är $x^2+z^2=5$ (insättning av $x=y$ i $x^2+4y^2+5z^2=25$) och vi ser att denna kurva skär xy-planet i $(\sqrt{5},\sqrt{5},0)$ och z-axeln i $(0,0,\sqrt{5})$. Eftersom Γ genomlöps moturs sett från $(-1,-2,0)$ då är $(\sqrt{5},\sqrt{5},0)$ startpunkten och $(0,0,\sqrt{5})$ är ändpunkten. I sfäriska koordinater har vi då $(r,\theta,\phi)=(\sqrt{10},\pi/2,\pi/4)$ som startpunkten och $(r,\theta,\phi)=(\sqrt{5},0,\pi/4)$ som ändpunkt. Vi har

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot\,d\mathbf{r} = \Phi(\sqrt{5},0,\pi/4) - \Phi(\sqrt{10},\pi/2,\pi/4) = -\frac{\sqrt{5}}{11}.$$

5.) Lösning 1: Kurvintegralen kan skrivas som $\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ med $\mathbf{A} = \left(\frac{x}{(x^2+4y^2)^{3/2}}, \frac{4y}{(x^2+4y^2)^{3/2}}\right)$. Observera att $\mathbf{A}$ är ett potentialfält i det område där $(x,y) \neq (0,0)$ eftersom

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{4y}{(x^2+4y^2)^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{(x^2+4y^2)^{3/2}}$$

i alla punkter där $(x,y) \neq (0,0)$. Då är $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ med

$$\Phi = -\frac{1}{(x^2+4y^2)^{1/2}}$$

i varje enkelt sammanhängande område som utesluter origo $(0,0)$. Ett sådant område är området $1/2 \leq x+y \leq 3/2$ som innehåller linjen $x+y=1$, och vi erhåller

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(0,1) - \Phi(1,0) = \frac{1}{2}.$$

Lösning 2: Lägg till kurvorna $\Gamma_1 : 1 \leq x \leq 2,\ y = 0$ och $\Gamma_2 : x^2+4y^2 = 4,\ x,y \geq 0$. Då är $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma$ en enkel, sluten styckvis C^1-kurva som omsluter det enkelt sammanhängande området $D : x+y \geq 1,\ x^2+4y^2 \leq 4,\ x,y \geq 0$. Enligt Greens formel gäller

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{4y}{(x^2+4y^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{(x^2+4y^2)^{3/2}}\right) dxdy = 0$$

då $\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma$ genomlöps moturs (och då genomlöps Γ från $(0,1)$ till $(1,0)$). Av detta följer att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

där Γ genomlöps nu från $(1,0)$ till $(0,1)$ och Γ_1 och Γ_2 genomlöps moturs.

Vi har

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma_1} \frac{x}{(x^2+4y^2)^{3/2}}dx + \frac{4y}{(x^2+4y^2)^{3/2}}dy \\ &= [1 \leq x \leq 2,\ y=0] \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma} \frac{x}{(x^2+4y^2)^{3/2}}dx + \frac{4y}{(x^2+4y^2)^{3/2}}dy \\ &= [x = 2\cos\phi,\ y = \sin\phi,\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}] \\ &= 0\end{aligned}$$

av vilket det följer att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}.$$

Anmärkning: Här finns det många varianter. En annan möjlighet är att lägga till två sträckor $\Gamma_1 : x = 1,\ 0 \leq y \leq 1$ och $\Gamma_2 : y = 1,\ 0 \leq x \leq 1$. För att tillämpa Greens formel ska man genomlöpa $\Gamma + \Gamma_1 + \Gamma_2$ moturs, och då är den sökta kurvintegralen lika med kurvintegralen längs $\Gamma_1 + \Gamma_2$ (moturs). Under **inga omständigheter** ska man ta sträckor som har origo som ändpunkt, för då är de integraler som uppstår divergenta.

Lösning 3: En direkt parametrisering av sträckan ger ortsvektorn för punkter på Γ som $\mathbf{r}(y) = (1-y, y)$ med $y : 0 \to 1$. Då är kurvintegralen

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{A}(\mathbf{r}(y))\cdot \mathbf{r}'(y)dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1-y}{(5y^2-2y+1)^{3/2}}, \frac{4y}{(5y^2-2y+1)^{3/2}}\right)\cdot(-1,1)dy \\
&= \int_0^1 \frac{5y-1}{(5y^2-2y+1)^{3/2}}dy \\
&= [u = 5y^2-2y+1,\ du = (10y-2)dy] \\
&= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{du}{u^{3/2}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

6.) Vektorfältet $\mathbf{A}$ är singulärt på x-axeln. Låt S_ϵ beteckna ytan $x = y^2 + z^2,\ \ 0 < \epsilon^2 \le x \le 1$, och låt S vara den givna ytan $x = y^2+z^2,\ 0 \le x \le 1$. Vi har då det sökta flödet Φ som

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}\, dS = \lim_{\epsilon\to 0}\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot \hat{n}_\epsilon\, dS_\epsilon.$$

Parametrisera S_ϵ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi) = (\rho^2, \rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$ där $(\rho,\phi)\in D$ med $D : \epsilon \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Vi har $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\rho, -2\rho^2\cos\phi, -2\rho^2\sin\phi)$. Vi ska ha $\hat{n}\cdot\hat{x} \le 0$ och då måste vi välja $\hat{n}_\epsilon = -(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)/\|\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi\|$ av vilket det nu följer att har vi

$$\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_\epsilon\, dS_\epsilon &= -\iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)\, d\rho\, d\phi \\
&= \iint_D (\frac{1}{\rho}, \frac{\cos\phi}{\rho^2}, \frac{\sin\phi}{\rho^2})\cdot(-\rho, 2\rho^2\cos\phi, 2\rho^2\sin\phi)d\rho\, d\phi \\
&= \iint_D d\rho\, d\phi \\
&= 2\pi(1-\epsilon).
\end{aligned}$$

Slutligen erhåller vi

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}\, dS = \lim_{\epsilon\to 0}\iint_{S_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{n}_\epsilon\, dS_\epsilon = 2\pi.$$