TATA44 Lösningar till tentamen 27/08/2010.

1.) Arean A av ytstycket S ges av formeln

$$A = \iint_D |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| ds dt$$

där $D : 0 \leq s \leq t,\ 0 \leq t \leq 1$. En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (-2s^2 \cos t, -2s^2 \sin t, s)$ av vilket det följer att

$$\begin{aligned}
A &= \iint_D \sqrt{s^2 + 4s^4} ds dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^t s\sqrt{1 + 4s^2} ds \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^t s\sqrt{1 + 4s^2} ds \right) dt \\
&= \frac{1}{12} \int_0^1 [(1 + 4t^2)^{3/2} - 1] dt \qquad (1)
\end{aligned}$$

där det sista steget fås genom variabelbytet $u = 1 + 4s^2$. Integralen

$$\int_0^1 (1 + 4t^2)^{3/2} dt$$

behandlas med Hermites Rotansats. Vi har

$$\int_0^1 (1 + 4t^2)^{3/2} dt = \int_0^1 \frac{(1 + 4t^2)^2}{\sqrt{4t^2 + 1}} dt$$

och vi sätter

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1 + 4t^2)^2}{\sqrt{4t^2 + 1}} dt &= \int \frac{16t^4 + 8t^2 + 1}{\sqrt{4t^2 + 1}} dt \\
&= (At^3 + Bt^2 + Ct + D)\sqrt{4t^2 + 1} + \int \frac{K}{\sqrt{4t^2 + 1}} dt
\end{aligned}$$

enligt Hermites Rotansats . Derivering i V.L. och H.L. ger

$$\frac{16t^4 + 8t^2 + 1}{\sqrt{4t^2 + 1}} = (3At^2 + 2Bt + C)\sqrt{4t^2 + 1} + \frac{4t(At^3 + Bt^2 + Ct + D)}{\sqrt{4t^2 + 1}} + \frac{K}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

av vilket det följer att

$$16t^4 + 8t^2 + 1 = (3At^2 + 2Bt + C)(4t^2 + 1) + 4t(At^3 + Bt^2 + Ct + D) + K$$

som ger

$$16t^4 + 8t^2 + 1 = 16At^4 + 12Bt^3 + (3A + 8C)t^2 + (2B + 4D)t + C + K$$

och vi får $A = 1,\ B = D = 0,\ C = 5/8,\ K = 3/8$. Då är

$$\int \frac{(1+4t^2)^2}{\sqrt{4t^2+1}}dt = (t^3 + \frac{5t}{8})\sqrt{4t^2+1} + \frac{3}{8}\int \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}dt.$$

Integralen $\int \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}dt$ beräknas så här:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}dt = [w = 2t] = \int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{w^2+1}}dw = \frac{1}{2}\ln[w + \sqrt{w^2+1}] + L,$$

där det sista steget är en standardintegral (Persson och Böiers) och L är en konstant. Vi får då

$$\int \frac{(1+4t^2)^2}{\sqrt{4t^2+1}}dt = (t^3 + \frac{5t}{8})\sqrt{4t^2+1} + \frac{3}{16}\int \ln[2t + \sqrt{4t^2+1}] + L$$

och då är

$$\int_0^1 \frac{(1+4t^2)^2}{\sqrt{4t^2+1}}dt = \frac{13}{8}\sqrt{5} + \frac{3}{16}\ln[2+\sqrt{5}]$$

och vi får

$$A = \frac{13}{96}\sqrt{5} + \frac{1}{48}\ln[2+\sqrt{5}] - \frac{1}{12}.$$

2.) Lösning 1: Lägg till ytan $S_1 : x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0$ med enhetsnormal $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1}$. Då är ytan $S + S_1$ sluten och om V betecknar området som omsluts av S och S_1 så har vi, enligt Gauss' Sats,

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS + \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1}dS_1 = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV.$$

Här pekar enhetsnormalerna $\hat{\mathbf{n}}$ och $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1}$ ut ur kroppen V, enligt förutsättningarna i Gauss' Sats. En enkel undersökning visar att villkoret $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{z}} > 0$ gör att $\hat{\mathbf{n}}$ pekar ut ur kroppen V.

En enkel räkning ger $\nabla\cdot\mathbf{A} = 2(x+y)$ och vi får

$$\begin{aligned}\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV &= 2\iint_{0\leq x^2+y^2\leq 4}\left(\int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}}(x+y)dz\right)dxdy\\ &= 2\iint_{0\leq x^2+y^2\leq 4}[2-\sqrt{x^2+y^2})](x+y)dxdy\\ &= 0\end{aligned}$$

efter ett variablebyte till polära koordinater $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$, med $0\leq r\leq 2,\ 0\leq\phi\leq 2\pi$, och en sedvanlig integration. Då har vi att flödet Φ ges genom

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = -\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1}dS_1.$$

Vi vet att $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1}$ pekar i negativ z-riktning och då pekar $-\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1}$ pekar i positiv z-riktning. Således har vi

$$\Phi = \iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{z}}dS_1 = \iint_{S_1}(x^2+y^2)dS_1.$$

S_1 är cirkelskivan $0\leq x^2+y^2\leq 4$ och en enkel räkning med plana polära koordinater ger

$$\Phi = 8\pi.$$

Lösning 2: Det går (med ihärdig räkning) att beräkna flödet utan Gauss' Sats. Flödet definieras av integralen

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Ortsvektorn för punkter på S är $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 2 - \sqrt{x^2+y^2})$ med $D : x^2 + y^2 \leq 4$ eftersom vi ska ha $z \geq 0$. En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$ och vi har $\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) = 1 > 0$.

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\
&= \iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \left(x\sqrt{x^2+y^2} + y[\sqrt{x^2+y^2} + \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 4] + x^2 + y^2 \right) dxdy.
\end{aligned}$$

Byt till polära koordinater: $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$ och vi erhåller

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\phi} [r^3 \cos\phi + (r^3 - 4r^2 + 4r)\sin\phi + r^3 \sin^3\phi + r^3] d\phi \right) dr \\
&= 2\pi \int_0^2 r^3 dr \\
&= 8\pi.
\end{aligned}$$

OBS: Här har vi använt oss av det faktum att $\int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^3\phi d\phi = 0.$

3.) Vi har

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

För Γ_1 sätter vi $y = \cos\theta$, $z = \sin\theta$ med $\theta : \pi \to 0$ så att $y : -1 \to 1$. Ortsvektorn för Γ_1 är $\mathbf{r}(\theta) = (0, \cos\theta, \sin\theta)$ och vi har då

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_\pi^0 (0, 2\sin\theta, \sin\theta) \cdot \mathbf{r}'(\theta) d\theta \\
&= \int_\pi^0 (0, 2\sin\theta, \sin\theta) \cdot (0, -\sin\theta, \cos\theta) d\theta \\
&= \int_\pi^0 [\cos\theta \sin\theta - 2\sin^2\theta] d\theta \\
&= \int_\pi^0 [\cos 2\theta - 1] d\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

För Γ_2 är ortsvektorn $\mathbf{r}(y) = (1-y, y, 0)$ och $y : 1 \to 0$ vilket ger att

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^0 (0, y^2(1-y), y(1-y)) \cdot \mathbf{r}'(y) dy \\
&= \int_1^0 (0, y^2(1-y), y(1-y)) \cdot (-1, 1, 0) dy \\
&= \int_1^0 y^2(1-y) dy \\
&= -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

För Γ_3 är ortsvektorn $\mathbf{r}(y) = (1+y, y, 0)$ och $y : 0 \to -1$ vilket ger att

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{-1} (0, y^2(1+y), y(1+y)) \cdot \mathbf{r}'(y) dy \\
&= \int_0^{-1} (0, y^2(1+y), y(1+y)) \cdot (1, 1, 0) dy \\
&= \int_0^{-1} y^2(1+y) dy \\
&= -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Vi erhåller

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \pi - \frac{1}{6}.$$

4.) Med $\mathbf{A} = (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$, där $f(x,y,z) = axy + z^2,\ g(x,y,z) = 2x^2,\ h(x,y,z) = 3z^2 + bxz$, villkoren för att $\mathbf{A}$ är ett potentialfält är att $f'_y = g'_x,\ f'_z = h'_x,\ g'_z = h'_y$. (Det går även att använda kriteriet $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i det här fallet, men denna metod är speciell för tre dimensioner eftersom kryssprodukten är inte väldefinierad för andra dimensioner.) Detta ger ekvationerna $4x = ax$, $2z = bz$ som ska gälla för (x,y,z) i ett enkelt sammanhängande område. Då har vi $a = 4,\ b = 2$. Nu söker vi en funktion $\Phi(x,y,z)$ sådan att

$$\Phi'_x = 4xy + z^2, \quad \Phi'_y = 2x^2, \quad \Phi'_z = 3z^2 + 2xz.$$

Om vi integrerar $\Phi'_y = 2x^2$ så erhåller vi $\Phi(x,y,z) = 2x^2y + K(x,z)$. Insättning av denna ekvation i $\Phi_x = 4xy + z^2$ ger $K'_x = z^2$ av vilket det följer att $K'_x = z^2$ och vi får $K(x,z) = xz^2 + L(z)$, som i sin tur ger $\Phi(x,y,z) = 2x^2y + xz^2 + L(z)$. Insättning av den sistnämnda ekvationen i $\Phi'_z = 3z^2 + 2xz$ ger $L'(z) = 3z^2$ och då är $L(z) = z^3 + C$ med C en godtycklig konstant. Således har vi

$$\Phi(x,y,z) = 2x^2y + xz^2 + z^3 + C.$$

Integralen

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(1,1,0) - \Phi(0,0,0)$$

eftersom $\mathbf{A}$ är ett potentialfält med potential $\Phi(x,y,z) = 2x^2y + xz^2 + z^3 + C$ och kurvintegralen är därmed oberoende av vägen mellan kurvans ändpunkter. Vi erhåller

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2.$$

5.) Ortsvektorn för punkter på ytan S är $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, x^2 + y^2 - 1)$ och vektorn $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-2x, -2y, 1)$ är en normalvektor till S. Vidare har vi $\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) = 1 > 0$. Sätt $D : (x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. Flödet av vektorfältet är

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\
&= \iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) dxdy \\
&= \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 2} \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0 \right) \cdot (-2x, -2y, 1)\, dxdy \\
&= -2 \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 2} dxdy \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

6.) Vektorfältet $\mathbf{A}$ är singulärt på z-axeln. I övriga punkter får vi $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Välj en sluten kurva $C : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ som är inom området där $x^2 + y^2 \neq 0$ och då utgör Γ och C randen till en yta S inom området $x^2 + y^2 \neq 0$ (rita en figur). Enligt Stokes' Sats gäller

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

eftersom $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Observera att Γ och C genomlöps så att S är alltid till vänster om den riktning i vilken kurvan genomlöps. På C är $\mathbf{A} = (-y, x, 0)$ och vi parametriserar C genom att sätta $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ z = 0$ med $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ortsvektorn för C är $\mathbf{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Eftersom Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0,0,39)$ så genomlöps C medurs sett från samma punkt, och då har vi $\theta : 2\pi \to 0$, som ger nu

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= -\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\
&= -\int_{2\pi}^0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}'(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$