LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.
2011-08-22, kl 08.00–12.00

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.
Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.
Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

---

1. Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = 3 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför ytan $z^2 - x^2 - y^2 = 3$ då $z \geq 0$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = x^3\hat{x} + y^3\hat{y} + z^3\hat{z}$$

ur ytan $z = 4 - x^2 - y^2$, med $z \geq 0$ i riktningen $\hat{n}$ där $\hat{n} \cdot \hat{z} \geq 0$.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$ genom ytan $z = \sqrt{x^2 - y^2} - x^2 - y^2, \;\; z \geq 0$ i riktningen som ges genom $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

4. Bestäm en potential för vektorfältet

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = 2r\hat{r} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\hat{\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\hat{\phi}$$

och beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där Γ är skärningskurvan mellan planet $x = y$ och ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$ med $x, y \geq 0, \; 0 \leq z \leq \sqrt{2}$ och Γ genomlöps moturs sett från punkten $(1, -1, 0)$.

5. Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där

$$\mathbf{A} = \frac{2}{3}\frac{x}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{2/3}}\hat{x} + \frac{4}{3}\frac{y}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{2/3}}\hat{y} + \frac{2z}{(x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{2/3}}\hat{z}$$

och Γ är kurvan som är skärningen mellan planet $x + y + z = 1$ och ellipsoiden $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$. Kurvan Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 101)$.

6. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A} = \dfrac{1}{(x - y)^{2/3}}\,\hat{x} - \dfrac{1}{(x - y)^{2/3}}\,\hat{y}$ och Γ är kurvan $x^2 + y^2 = 8, \;\; x, y \geq 0$ i planet. Γ genomlöps moturs.