TATA44 Lösningar 28/8/2013.

1.) Inför cylinderkoordinater. Konens ekvation är då $z = \rho$ och paraboloidens ekvation är $2z = 1 + \rho^2$. Dessa två ytor skär varandra då $2z = 1 + z^2$ som ger $z^2 - 2z + 1 = 0$ eller $(z-1)^2 = 0$, och då är $z = 1$. Vårt ytstycke ges då av $S : z = \rho,\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Sätt $D : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$ och parametrisera S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$. Vi har

$$\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} + \hat{z}) \times (\rho\,\hat{\phi}) = -\rho\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}.$$

Arean av S är nu

$$\begin{aligned}
A(S) &= \iint_S dS \\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\
&= \sqrt{2} \iint_D \rho\, d\rho d\phi \\
&= \sqrt{2} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho\, d\phi \right) d\rho \\
&= \pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Lägg till ytorna $S_1 : x^2 + y^2 \le 1,\ z = 0$ och $S_2 : x^2 + y^2 \le 3,\ z =1$. Ytorna $S + S_1 + S_2$ avgränsar en kropp V. Flödet av $\mathbf{A}$ ut ur V genom S är

$$\Phi = \iint_{S+S_1+S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$$

och vi har enligt Gauss' Sats

$$\iint_{S+S_1+S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dxdydz = 0,$$

och då är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = -\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2.$$

På S_1 är $z = 0$ och $\hat{n}_1 = -\hat{z}$ och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 = 0$ på S_1. På S_2 är $z = 1$ och $\hat{n}_2 = \hat{z}$ och där är

$$\mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 = x^2.$$

Vi parametriserar S_2 med ortsvektorn (uttryckt i cylinderkoordinater (ρ, ϕ, z)) $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \le \rho \le \sqrt{3},\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Vi erhåller då

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS \\
&= -\iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2 \\
&= -\iint_{S_2} x^2 dS_2 \\
&= -\iint_D \rho^2 \cos^2\phi |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho\, d\phi \\
&= -\iint_D \rho^3 \cos^2\phi\, d\rho\, d\phi \\
&= -\left(\int_0^{\sqrt{3}} \rho^3\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi\right) \\
&= -\frac{9\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

3.) I cylinderkoordinater parametriserar vi kurvans ortsvektor som

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(\phi) &= \rho(\phi)\hat{\rho} + \hat{z} \\
&= (1+\phi)\hat{\rho} + \hat{z}
\end{aligned}
$$

vilket ger

$$
\mathbf{r}'(\phi) = \hat{\rho} + (1+\phi)\hat{\phi}.
$$

Vi har

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= 2zx\hat{x} + 2zy\hat{y} + (x^2+y^2)^2\hat{z} \\
&= 2z(x\hat{x} + y\hat{y}) + (x^2+y^2)^2\hat{z} \\
&= 2z\rho\hat{\rho} + \rho^4\hat{z} \\
&= 2(1+\phi)\hat{\rho} + (1+\phi)^4\hat{z}
\end{aligned}
$$

på kurvan Γ. Då är

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot\, d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2(1+\phi)\hat{\rho} + (1+\phi)^4\hat{z}\right) \cdot \left(\hat{\rho} + (1+\phi)\hat{\phi}\right) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} 2(1+\phi) d\phi \\
&= (2\pi+1)^2 - 1 \\
&= 4\pi(\pi+1).
\end{aligned}
$$

4.) Om $\mathbf{A}$ är ett potentialfält då ska $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ i det område där $\mathbf{A}$ är definierat. En potential finns då om $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i detta område. Vi erhåller

$$\nabla \times \mathbf{A} = 2z(b-2)\hat{x} + (3b-2a)y)\,\hat{z}$$

och för att $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i ett område då måste $a = 3,\ b = 2$. För dessa värden har vi

$$\mathbf{A} = 3y^2\hat{x} + (6xy - 2z^2)\hat{y} + (3z^2 - 4yz)\hat{z},$$

och med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ då har vi

$$\Phi'_x = 3y^2, \quad \Phi'_y = 6xy - 2z^2, \quad \Phi'_z = 3z^2 - 4yz.$$

Ekvationen $\Phi'_x = 3y^2$ ger $\Phi = 3xy^2 + g(y,z)$. Insättning av detta i $\Phi'_y = 6xy - 2z^2$ ger $g'_y(y,z) = -2z^2$ vilket ger att $g(y,z) = -2yz^2 + h(z)$ och således har vi

$$\Phi = 3xy^2 - 2yz^2 + h(z).$$

Insättning i $\Phi'_z = 3z^2 - 4yz$ ger $h'(z) = 3z^2$ vilket nu ger att h där C är en godtycklig konstant. Vi erhåller då

$$\Phi = 3xy^2 - 2yz^2 + z^3 + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Vektorfältet $\mathbf{A}$ är ett potentialfält för de punkter där $\rho \neq 0$ ty $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ då $\rho \neq 0$. Ett enkelt sätt att se detta är att skriva om

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$$

och med $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ och $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, vi får

$$\mathbf{A} = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{x} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{y},$$

och nu är det lätt att beräkna $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ för $x^2 + y^2 \neq 0$. Detta medför att $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ i ett område där $x^2 + y^2 \neq 0$ och om Γ_1 är kurvan $x^2 + y^2 = 1$ och S är ytan $x^2 + y^2 \geq 1,\ 3x^2 + 4y^2 \leq 12,\ z = 0$ vi har, enligt Stokes' Sats, att

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A}\, dS = 0$$

där Γ genomlöps motuurs medan Γ_1 genomlöps medurs, vilket ger nu

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

och där Γ_1 genomlöps nu moturs. På Γ_1 är $\rho = 1$ och ortsvektorn för Γ_1 är $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$, så att $\mathbf{r}'(\phi) = \hat{\phi}$ och, då $0 \leq \phi \leq 2\pi$ på Γ_1, vi har

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\phi) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \hat{\phi} \cdot \hat{\phi}\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

6.) Parametrisera S genom ortsvektorn (i cylinderkoordinater):

$$\mathbf{r}(\phi, z) = 2\hat{\rho} + z\hat{z}$$

med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 2$. På S har vi (i cylinderkoordinater)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(9 + z^2)^{3/2}}[2z\hat{\rho} + z^2\, \hat{z}].$$

Observera att

$$\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = 2\hat{\phi} \times \hat{z} = 2\hat{\rho}.$$

Flödet ut genom S är då

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n}\, dS &= \iint_D \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z)\, d\phi\, dz \\
&= 2 \iint_D \mathbf{A} \cdot \hat{\rho}\, d\phi\, dz \\
&= 4 \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{z}{(9 + z^2)^{3/2}} d\phi \right) dz \\
&= 8\pi \int_0^2 \frac{z}{(9 + z^2)^{3/2}}\, dz \\
&= 8\pi \left[-\frac{1}{\sqrt{9 + z^2}} \right]_0^2 \\
&= 8\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{13}} \right].
\end{aligned}$$