

TATA44 Lösningar 27/8/2014.

1.) Sfären $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ skär paraboloiden $z = 4 - (x^2 + y^2)$ då $4 - z + (z-2)^2 = 4$ och då är $z^2 - 5z + 4 = 0$, som ger $(z-1)(z-4) = 0$. Då skär ytorna varandra i $z = 4$ och $z = 1$. $z = 4$ då $x^2 + y^2 = 0$ och $z = 1$ då $x^2 + y^2 = 3$. Vi söker arean av $S : z = 4 - (x^2 + y^2)$, $0 \leq x^2 + y^2 \leq 3$ och vi parametriserar S genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \hat{\rho} + (4 - \rho^2) \hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= (\hat{\rho} - 2\rho \hat{z}) \times (\rho \hat{\phi}) \\ &= 2\rho^2 \hat{\rho} + \rho \hat{z}. \end{aligned}$$

Arean av S är nu

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\ &= \iint_D \sqrt{\rho^2 + 4\rho^4} d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho \\ &= [t = 1 + 4\rho^2] \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^{13} t^{1/2} dt \\ &= \frac{\pi}{6} [13\sqrt{13} - 1]. \end{aligned}$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla \times \mathbf{A} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$. Kurvan Γ är randen till ytan $S : x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$. Enligt Stokes sats har vi nu att

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS$$

där normalen $\hat{\mathbf{n}}$ till S pekar i samma riktning som $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$, då γ genomlöps moturs sett från (17, 17, 17). Parametrisera S genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\hat{x} + y\hat{y} + (1 - x - y)\hat{z}$ med $(x, y) \in D$ där $D : x + y \leq 1$, $x, y \geq 0$. Observera att $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ och vi har

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS \\ &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}(x, y))) \cdot \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y dx dy \\ &= 3 \iint_D dx dy \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

eftersom $\iint_D dx dy$ är arean av triangeln D i xy -planet.

3.) Lösning 1: Observera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 3$ och att \mathbf{A} är C^1 överallt. Sätt $S : z = 4 - x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 3$ och $S_1 : z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $S_2 : z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 3$. Vidare lät V beteckna den kropp som avgränsas av ytorna S, S_1, S_2 . Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1+S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}$$

där enhetsnormalen \hat{n} pekar ut ur V . Således är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2.$$

För S_1 är $\hat{n}_1 = -\hat{z}$ och

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 &= - \iint_{S_1} xy dx dy \\ &= [x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\ &= - \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \cos \phi \sin \phi d\phi \right) \rho d\rho = 0 \end{aligned}$$

För S_2 är $\hat{n}_2 = \hat{z}$ och

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2 &= \iint_{S_2} (3 + xy) dx dy \\ &= [x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (3 + \rho^2 \cos \phi \sin \phi) d\phi \right) \rho d\rho \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

Observera att $\iiint_V dV = \iiint_{V_1} dV_1 - \iiint_{V_2} dV_2$ där $V_1 : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 2$ och $V_2 : 3 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$. Vi har i cylinderkoordinater $V_1 : 0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 4 - \rho^2$ medan $V_2 : 0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $3 \leq z \leq 4 - \rho^2$ och med ett variabelbyte till cylinderkoordinater erhåller vi

$$\begin{aligned} \iiint_{V_1} dV_1 &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{4-\rho^2} dz \right) d\phi \right) \rho d\rho \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \iiint_{V_2} dV_2 &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_3^{4-\rho^2} dz \right) d\phi \right) \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

vilket ger

$$\iiint_V dV = 8\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}.$$

Av detta följer att det sökta flödet är

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 \\ &= 3 \iiint_V dV - 3\pi \\ &= \frac{39\pi}{2}. \end{aligned}$$

Lösning 2: Vi kan skriva

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \nabla \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + xyz \right) \\ &= \frac{1}{2} \nabla (x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz) \\ &= \frac{1}{2} \nabla (\rho^2 + z^2 + \rho^2 z \sin 2\phi) \quad \text{i cylinderkoordinater} \\ &= \frac{1}{2} \left(2\rho(1 + z \sin 2\phi) \hat{\rho} + 2\rho z \cos 2\phi \hat{\phi} + \rho^2 \sin 2\phi \hat{z} \right) \\ &= \rho(1 + z \sin 2\phi) \hat{\rho} + \rho z \cos 2\phi \hat{\phi} + \frac{\rho^2 \sin 2\phi}{2} \hat{z}. \end{aligned}$$

Ytan S ges genom $z = 4 - \rho^2$, $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och parametriseras genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho \hat{\rho} + (4 - \rho^2) \hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - 2\rho \hat{z}) \times (\rho \hat{\phi}) = 2\rho^2 \hat{\rho} + \rho \hat{\phi}$ som pekar ut ur ytan, bort från z -axeln. Det sökta flödet är

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi) d\rho d\phi \\ &= \iint_D \left[2\rho^3(1 + \sin 2\phi) + \rho(4 - \rho^2) + \frac{\rho^3}{2} \sin 2\phi \right] d\rho d\phi \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left[2\rho^3(1 + \sin 2\phi) + \rho(4 - \rho^2) + \frac{\rho^3}{2} \sin 2\phi \right] d\phi \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_1^2 (\rho^3 + 4\rho) d\rho \quad \text{ty} \quad \int_0^{2\pi} \sin 2\phi d\phi = 0 \\ &= 2\pi \left[2\rho^2 + \frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 \\ &= \frac{39\pi}{2}. \end{aligned}$$

4.) Standardräkningar med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ ger

$$\Phi(x, y, z) = x^2z + xy^2 + yz^2 + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Planet $x = 1$ skär $z = 4 - x^2 - y^2$ längs kurvan $z = 3 - y^2$. Eftersom $z \geq 0$ så måste $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. Kurvans startpunkt är således $(1, \sqrt{3}, 0)$ och slutpunkten är $(1, -\sqrt{3}, 0)$. Eftersom $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ så har vi att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(1, -\sqrt{3}, 0) - \Phi(1, \sqrt{3}, 0) = 0.$$

5.) Vi har

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

i alla punkter där $x^2 + y^2 \neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $x^2 + y^2 = 9, z = 0$. Kurvan $\Gamma + \Gamma_1$ utgör randen till en yta S på paraboloiden. Enligt Stokes Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

och av detta följer att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där Γ och Γ_1 genomlöps i samma positiva riktning (moturs: observera att S ska ligga till vänster om genomlöpningsriktningen för att Stokes' Sats ska gälla; här kan man välja moturs för Γ_1 vilket innebär att Γ genomlöps medurs). På Γ_1 är $z = 0$ och med $x = 3 \cos \phi, y = 3 \sin \phi$ där $\phi : 0 \rightarrow 2\pi$ så kan vi parametrisera Ortsvektorn för Γ_1 som $\mathbf{r}(\phi) = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$. Vi har nu

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin \phi}{3} \hat{x} + \frac{\cos \phi}{3} \hat{y} \right) \cdot (-3 \sin \phi \hat{x} + 3 \cos \phi \hat{y}) d\phi \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Således har vi

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

6.) Inför sfäriska koordinater (r, θ, ϕ) . Ytan $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ beskrivs genom olikheterna $D : r = 3, \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ Parametrisera S genom Ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta, \phi) = 3\hat{\mathbf{r}}$. Det sökta flödet är

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi) d\theta d\phi \\ &= \iint_D \frac{1}{9} \hat{\mathbf{r}} \cdot (9 \sin \theta \hat{\mathbf{r}}) d\theta d\phi \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \sin \theta d\phi \right) d\theta \\ &= \pi.\end{aligned}$$