TATA44 Lösningar 26/8/2015.

1.) Inför cylinderkoordinater (ρ, ϕ, z). Cylindern har ekvationen $\rho = 2$ och paraboloiden har ekvationen $z = 5 - \rho^2$. Vi söker arean av $S : z = 5 - \rho^2,\ 0 \le \rho \le 2,\ \ 0 \le \phi \le 2\pi$ och vi parametriserar S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + (5 - \rho^2)\,\hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \le \rho \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= (\hat{\rho} - 2\rho\,\hat{z}) \times (\rho\,\hat{\phi}) \\ &= 2\rho^2\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}.\end{aligned}$$

Arean av S är nu

$$\begin{aligned}A(S) &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\ &= \iint_D \sqrt{\rho^2 + 4\rho^4}\, d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho\, d\rho \\ &= [t = 1 + 4\rho^2] \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^{17} t^{1/2} dt \\ &= \frac{\pi}{6} \left[17\sqrt{17} - 1\right].\end{aligned}$$

2.) Observera att $\nabla\cdot\mathbf{A} = x^2+2y^2+3z^2$ och att $\mathbf{A}$ är C^1 överallt. Sätt $S : x^2+2y^2+3z^2 = 1,\ z > 0$ och $S_1 : z = 0,\ x^2 + 2y^2 \le 1$. Vidare låt V beteckna den kropp som avgränsas av ytorna S, S_1. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$$

där enhetsnormalen $\hat{n}$ pekar ut ur V. Således är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

För S_1 är $\hat{n}_1 = -\hat{z}$ och

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = -\iint_{S_1} x^2 z\, dxdy = 0$$

eftersom $z = 0$ på S_1.

Således är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

Inför rymdpolära koordinater $x = r\cos\phi\sin\theta,\ y = \dfrac{r}{\sqrt{2}}\sin\phi\sin\theta,\ z = \dfrac{r}{\sqrt{3}}\cos\theta$. V beskrivs i dessa rymdpolära koordinater som $0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Vi har nu

$$\begin{aligned}\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV &= \iiint_V (x^2+2y^2+3z^2)dxdydz \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^1\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi} r^4\sin\theta\, d\phi\right)d\theta\right)dr \\ &= \frac{2\pi}{5\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

Vi erhåller nu att det sökta flödet är

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \frac{2\pi}{5\sqrt{6}}.$$

3.) En standardräkning ger att $\nabla\times\mathbf{A} = (x^2+y^2)\,\hat{z}$. Kurvan Γ är kurvan $x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+y^2 = 1$ och är randen till ytstycket $S: x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+y^2 \le 1$. Parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi) = \sqrt{2}\hat{\mathbf{r}}$ där $0 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Vi har $0 \le \theta \le \pi/4$ eftersom cylinder $x^2+y^2 = 1$ skär halvsfären $x^2+y^2+z^2 = 2,\ z \ge 0$ i $z = 1$. Då är θ som störst och eftersom $z = r\cos\theta$ i rymdpolära koordinater,så har vi med $z = 1,\ r = \sqrt{2}$ att $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$, vilket ger $\theta = \pi/4$ eftersom $0 \le \theta\pi$.

Enligt Stokes sats har vi nu att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$$

eftersom Γ genomlöps moturs sett från $(0,0,3)$. Enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ till S pekar ut från origo. Parametrisera S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi) = \sqrt{2}\hat{\mathbf{r}}$ med $(\theta,\phi)\in D$ där $D: 0 \le \theta \le \pi/4,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Observera att $\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi = 2\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}$ och att $\nabla\times\mathbf{A} = (x^2+y^2)\,\hat{z} = 2\sin^2\theta\,\hat{z}$. Vi har nu

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \\ &= \iint_D (\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi))\cdot\left(\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi\right)d\theta d\phi \\ &= 4\iint_D \sin^3\theta(\hat{z}\cdot\hat{\mathbf{r}})d\theta d\phi \\ &= 4\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\cos\theta d\phi\right)d\theta \\ &= 8\pi\int_0^{\pi/4}\sin^3\theta\cos\theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

4.) Standardräkningar med $\mathbf{A} = \nabla\Phi = \Phi'_r\,\hat{\mathbf{r}} + \dfrac{1}{r}\Phi'_\theta\,\hat{\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\Phi'_\phi\,\hat{\phi}$ ger

$$\Phi(x,y,z) = r^2\cos\theta\sin^2\phi + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Planet $x-y=0$ skär $x^2+y^2+2z^2=4$ längs kurvan $x^2+z^2=2,\ y=x$ med $x,y,z\geq 0$. Startpunkten är $z=0, x=\sqrt{2}, x=y$ i xy-planet och då är startpunkten $(r,\theta,\phi)=(2,\pi/2,\pi/4)$ i rymdpolära koordinater. Slutpunkten är $(r,\theta,\phi)=(\sqrt{2},0,\pi/4)$ uttryckt i rymdpolära koordinater. Eftersom $\mathbf{A}=\nabla\Phi$ så har vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(\sqrt{2},0,\pi/4) - \Phi(2,\pi/2,\pi/4) = 1.$$

5.) En standardräkning ger

$$\nabla\times\mathbf{A}=0$$

i alla punkter där $x^2+y^2\neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $x^2+y^2=1,\ y\geq 0,\ z=0$. Kurvan $\Gamma+\Gamma_1$ utgör randen till en yta S i xy-planet där. Observera att bägge kurvorna har sina ändpunkter i $(\pm 1,0)$ i planet. Enligt Stokes Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = 0$$

och av detta följer att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

där Γ och Γ_1 genomlöps i samma positiva riktning (moturs: observera att S ska ligga till vänster om genomlöpningsriktningen för att Stokes' Sats ska gälla; här kan man välja moturs för Γ_1 vilket innebär att Γ genomlöps medurs). På Γ_1 är $\rho=1$. Vi parametriserar Γ_1 genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi)=\hat{\rho}$ med $0\leq\phi\leq\pi$. Obervera att $\mathbf{r}'(\phi)=\hat{\phi}$. Vi har $\rho=1$ på Γ_1 och då är

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot\mathbf{r}'(\phi)d\phi \\ &= \int_0^\pi \left(\hat{\rho}+\hat{\phi}\right)\cdot\phi d\phi \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Således har vi

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \pi.$$

6.)Lösning 1: Vektorfältet kan skrivas som

$$\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

i sfäriska koordinater (r,θ,ϕ). En standardräkning ger $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ i alla punkter där $r\neq 0$. Sätt $S: z=5-\sqrt{x^2+y^2},\ z\geq 0$ och $L: x^2+y^2\leq 4,\ z=2$ samt $L_1: 1\leq x^2+y^2\leq 16\ z=0$ och $C: x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0$. Låt V beteckna området som omslutas av den slutna ytan $S+L+L_1+C$. Vi ser att $\mathbf{A}$ är C^1 i en omgivning av V och att $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ inom V. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+L+L_1+C} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = 0$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ pekar ut ur V. Av detta följer att det sökta flödet $\displaystyle\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$ ges av

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = -\iint_L \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}_L}\,dL - \iint_{L_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}_{L_1}}\,dL_1 - \iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}_C}\,dC.$$

där alla normaler pekar ut ur V.Vi har

$$\iint_{L_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}_{L_1}}\,dL_1 = 0$$

ty $\hat{\mathbf{n}_{L_1}} = -\hat{z}$ och då är $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}_{L_1}} = -\dfrac{z}{r^3} = 0$ ty $z=0$ på L_1. Vi erhåller nu

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = -\iint_L \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}_L}\,dL + \iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}_C}\,dC$$

där normalerna $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{n}_L}$, $\hat{\mathbf{n}_C}$ pekar nu bort från origo (riktningen på $\hat{\mathbf{n}_C}$ har ändrats så att den pekar bort från origo). På C är $r=1$ och då är $\mathbf{A}=\hat{\mathbf{r}}$ på C. Parametrisera C med ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi)=\hat{\mathbf{r}}$ där $(\theta,\phi)\in D$ och $D: 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Vi har $\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi = \sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}$. Vi får då att

$$\begin{aligned}\iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}_C}\,dC &= \iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi)\,d\theta d\phi\\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\phi\right)d\theta\\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

På L är $\hat{\mathbf{n}_L}=\hat{z}$ och $z=2,\ x^2+y^2\le 4$ och vi har

$$\begin{aligned}\iint_L \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}_L} &= \iint_{x^2+y^2\le 4}\frac{2}{(4+x^2+y^2)^{3/2}}dxdy\\ &= [x=r\cos\phi,\ y=r\sin\phi,\ 0\le r\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi]\\ &= 2\int_0^2\left(\int_0^{2\pi}\frac{r}{(4+r^2)^{3/2}}d\phi\right)dr\\ &= 4\pi\int_0^2\frac{r}{(4+r^2)^{3/2}}\,dr\\ &= [t=4+r^2]\\ &= 2\pi\int_4^8 t^{-3/2}dt\\ &= 2\pi-\pi\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Det sökta flödet är nu

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= -\iint_L \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}_L}\,dL + \iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}_C}\,dC\\ &= \pi\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Lösning 2: Sätt $S: z = 4 - \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le z \le 2$ samt $C: x^2+y^2 = 4,\ 0 \le z \le 2$ och $L: z = 0,\ 4 \le x^2+y^2 \le 16$. Låt V beteckna den volym som $S+L+C$ omsluter. Vi ser att $\mathbf{A}$ är C^1 i en omgivning av V och att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ inom V. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+L+C} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = 0$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ pekar ut ur V. Av detta erhåller vi att

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = -\iint_L \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}_L}\, dL + \iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}_C}\, dC$$

där $\hat{\mathbf{n}_C}$ pekar nu bort från z-axeln.

På L är $\hat{\mathbf{n}_L} = -\hat{z}$ och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}_L} = 0$ ty $z = 0$ på L. Detta ger nu att

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}_C}\, dC.$$

Ytan C ges genom $\rho = 2,\ 0 \le z \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi$ i cylinderkoordinater. Parametrisera C med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi, z) = 2\hat{\rho} + z\hat{z}$ med $(\phi, z) \in D$ där $D: 0 \le z \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Vidare ges $\mathbf{A}$ genom

$$\mathbf{A} = \frac{2}{(4+z^2)^{3/2}}\hat{\rho} + \frac{z}{(4+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

på C. Observera att $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = (2\hat{\phi}) \times \hat{z} = 2\hat{\rho}$. Vi har nu

$$\begin{aligned}
\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}_C}\, dC &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z)\, d\phi dz \\
&= \iint_D \frac{4}{(4+z^2)^{3/2}}\, d\phi dz \\
&= 8\pi \int_0^2 \frac{1}{(4+z^2)^{3/2}}\, dz \\
&= [z = 2\tan\theta,\ 0 \le \theta \le \pi/4] \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta \\
&= \pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$