**TATA44 Lösningar 23/8/2017.**

**1.)** Beteckna med $S$ ytan $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2 = 2$. Insättning av $z = \sqrt{x^2+y^2}$ i ekvationen $x^2+y^2+z^2 = 2$ ger $2z^2 = 2$ som ger nu $z = 1$ eftersom $z \geq 0$. Då är $S : x^2+y^2+z^2 = 2,\ z \geq 1$. Inför sfäriska koordinater $(r, \theta, \phi)$. På $S$ är $r = \sqrt{2}$ och $0 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Sätt $D : 0 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Parametrisera $S$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta, \phi) = \sqrt{2}\,\hat{\mathbf{r}}$ med $(\theta, \phi) \in D$. En standardräkning ger

$$\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = 2\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}$$

av vilket det följer att

$$\left|\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right| = 2\sin\theta.$$

Vi har då

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,dS &= \iint_D \frac{1}{3}\left|\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right|\,d\theta d\phi \\
&= \frac{2}{3}\iint_D \sin\theta\,d\theta d\phi \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\phi\right)d\theta \\
&= \frac{4\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{4\pi}{3}\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\
&= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left[\sqrt{2}-1\right].
\end{aligned}$$

**2.)** Vi har $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Sätt $S : x^2+y^2-z^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1$ samt $S_1 : x^2+y^2 \leq 1,\ z = 0$ och $S_2 : x^2+y^2 \leq 2,\ z = 1$. Då har vi enligt Gauss' Sats att

$$\iint_{S+S_1+S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV = 0$$

där $V$ är den kropp som $S+S_1+S_2$ omsluter. Observera att i Gauss' Sats pekar **alla normaler ut** ur kroppen och i synnerhet blir $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} < 0$ på $S$. Villkoret $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} < 0$ avser **endast** normalen till ytan $S$ och **inte** $S_1$ eller $S_2$. Normalen till $S_1$ är $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{z}$ (och inget annat) eftersom den pekar ut ur kroppen $V$ och normalen till $S_2$ är $\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{z}$.

Det sökta flödet är då

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV - \iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 - \iint_{S_2}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 dS_2.$$

På $S_1$ är $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{z}$ och $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 = 0$ ty $z = 0$ på $S_1$. På $S_2$ är $z = 1$ och $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 = 3(x^2+y^2)$. Vi har då att det sökta flödet är

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS &= -\iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 \\
&= -\iint_{x^2+y^2\le 2} 3(x^2+y^2)\,dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ 0\le\rho\le\sqrt{2},\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= -3\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\rho^3\,d\phi\right)d\rho \\
&= -6\pi.
\end{aligned}
$$

Vidare har vi

**3.)** Paraboloiden $z=x^2+y^2$ skär planet $2x+2y+z=2$ då $x^2+y^2+2x+2y=2$. Detta ger kurvan $(x+1)^2+(y+1)^2=4$. Sätt $D:(x+1)^2+(y+1)^2\le 4,\ x,y\ge 0$. Parametrisera $S$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y)=x\,\hat{x}+y\,\hat{y}+(2-2x-2y)\,\hat{z}$ där $(x,y)\in D$. Observera att $\Gamma$ är randen till ytan $S$. Standardräkningar ger

$$
\nabla\times\mathbf{A}=3(x^2+y^2)\,\hat{z},\quad \mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=2\,\hat{x}+2\,\hat{y}+\ \hat{z}.
$$

Stokes Sats ger nu

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot\, d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= \iint_D \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)\,dxdy \\
&= 3\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy \\
&= [x=-1+\rho\cos\phi,\ y=-1+\rho\sin\phi,\ 0\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= 3\int_0^2\left(\int_0^{2\pi}[2+\rho^2-2\rho\cos\phi-2\rho\sin\phi]]\,d\phi\right)\rho\,d\rho \\
&= 6\pi\int_0^2 (2+\rho^2)\rho\,d\rho \\
&= 48\pi.
\end{aligned}
$$

**4.)** Om $\mathbf{A}$ är ett potentialfält så finns det en funktion $\Phi(x,y,z)$ med $\mathbf{A}=\nabla\Phi$ och då måste $\nabla\times\mathbf{A}=0$. Vi har

$$
\nabla\times\mathbf{A}=(f'_z(y,z)-2z)\,\hat{y}+(f'_y(y,z)-1)\,\hat{z}
$$

och $\nabla\times\mathbf{A}=0$ då $f'_y=2,\ f'_z=2z$. Den första ekvationen ger $f(y,z)=y+g(z)$ och insättning i den andra ekvationen ger $g'(z)=2z$ vilket ger $g(z)=z^2+C$ där $C$ är en godtycklig konstant. Således har vi

$$
f(y,z)=2y+z^2+C
$$

och då är

$$\mathbf{A} = (2xy + 2y + z^2 + C)\,\hat{x} + (x^2 + 2yz + 2x + z)\,\hat{y} + (y^2 + 2xz + y)\,\hat{z}.$$

Om $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ då har vi

$$\Phi'_x = 2xy + y + z^2 + C, \quad \Phi'_y = x^2 + 2yz + 2x + z, \quad \Phi'_z = y^2 + 2xz + y.$$

Den sista ekvationen ger

$$\Phi = zy^2 + zy + xz^2 + H(x, y).$$

Insättning i den andra ekvationen ger

$$H'_y = x^2 + 2x$$

vilket ger

$$H(x, y) = x^2 y + 2xy + G(x).$$

och vi har då

$$\Phi = zy^2 + zy + xz^2 + x^2 y + 2xy + G(x).$$

Insättning av denna ekvation i $\Phi'_x = 2xy + y + z^2 + C$ ger $G'(x) = C$ och detta ger $G(x) = Cx + D$. Vi har då att potentialen till $\mathbf{A}$ är

$$\Phi = zy^2 + zy + xz^2 + x^2 y + 2xy + Cx + D$$

där $C, D$ är godtyckliga konstanter.

Kurvan $\Gamma$ har ändpunkterna i $(1, 0, 1)$ och $(-1, 0, -1)$ och vi har då

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(-1, 0, -1) - \Phi(1, 0, 1) = -2(1 + C)$$

(alternativt: $2(1 + C)$, om kurvan gernomlöps i den motsatta riktningen).

**5.)** En standardräkning ger $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $\rho \neq 0$. Sätt $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ och låt $S$ vara den yta som har $\Gamma + \Gamma_1$ som rand (och som inte skär $z$-axeln). $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ på ytan $S$. Med hjälp av Stokes' Sats får vi då att

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där båda kurvorna genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$.

Kurvan $\Gamma_1$ parametriseras av ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$ (i cylinderkoordinater) med $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har nu

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} (\hat{\rho} + \hat{\phi}) \cdot \hat{\phi}\, d\phi \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

**6.) Lösning 1:** En standardräkning ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $\rho \neq 0$.

Låt $S$ beteckna ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 3,\ 0 \leq z \leq 1$. Sätt $L_1 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3,\ z = 0$, $L_2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 1$ samt $C : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1$. Om $V$ är den kropp som avgränsas av $S + L_1 + L_2 + C$ då är $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ i $V$ och $\mathbf{A}$ är $C^1$ inom $V$ och i en omgivningav $V$. Enligt Gauss' Sats har vi då

$$\iint_{S+L_1+L_2+C} \mathbf{A} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = 0.$$

Det sökta flödet är då

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\iint_{L_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{L_1} dL_1 - \iint_{L_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{L_2} dL_2 - \iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dC$$

där alla normaler pekar ut ur $V$.

På $L_1$ är $\hat{\mathbf{n}}_{L_1} = -\hat{z}$ och $z = 0$ och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{L_1} = 0$.

På $L_2$ är $\hat{\mathbf{n}}_{L_2} = \hat{z}$ och $z = 1$ vilket ger

$$\begin{aligned}
\iint_{L_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{L_2} dL_2 &= \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 4} \frac{1}{\rho^3} dxdy \\
&= [x = \rho \cos\phi,\ y = \rho \sin\phi,\ 1 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2}\, d\phi \right) d\rho \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

På $C$ är $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Ortsvektorn för punkter på $C$ är $\mathbf{r}(\phi, z) = \hat{\rho} + z\,\hat{z}$ med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 1$. Vi får då att $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \hat{\rho}$ som pekar bort från $z$-axeln och vi ser då att $\hat{\mathbf{n}}_C = -\hat{\rho}$, som pekar ut ur $V$. Av detta erhåller vi att

$$\begin{aligned}
\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C\, dC &= -\iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z)\, d\phi dz \\
&= -\int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} (\hat{\rho} + z\,\hat{z}) \cdot \hat{\rho}\, d\phi \right) dz \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Det sökta flödet är nu

$$\begin{aligned}
\Phi &= -\iint_{L_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{L_2} dL_2 - \iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C\, dC \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

**Lösning 2:** Parametrisera ytan $S$ genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\phi, z) = \sqrt{z^2 + 3}\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}.$$

Ytans ekvation är $x^2 + y^2 - z^2 = 3$ och i cylinder koordinater har vi $\rho^2 - z^2 = 3$, vilket ger $\rho = \sqrt{z^2 + 3}$ eftersom $\rho \geq 0$ alltid. Insättning av detta i ortsvektorn i cylinderkoordinater $\mathbf{r} = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$ ger den ovannämnda ortsvektorn för punkter på $S$.

En enkel (standard)räkning ger

$$\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \sqrt{z^2+3}\,\hat{\rho} - z\,\hat{z}$$

som pekar bort från $z$-axeln. Sätt $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 1$. På $S$ har vi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) = \frac{1}{z^2+3}\,\hat{\rho} + \frac{z}{(z^2+3)^{3/2}}\,\hat{z}.$$

Då har vi

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z)\,d\phi\,dz \\
&= 3\iint_D \frac{1}{(z^2+3)^{3/2}} d\phi\,dz \\
&= 3\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{(z^2+3)^{3/2}} d\phi\right) dz \\
&= 6\pi \int_0^1 \frac{1}{(z^2+3)^{3/2}}\,dz \\
&= [z = \sqrt{3}\tan\theta,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2;\ dz = \sqrt{3}(1+\tan^2\theta)d\theta] \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/3} \cos\theta\,d\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}$$