TATA44 Lösningar 29/8/2018.

1.) Lösning 1: Ytan S är $z = 4 - (x^2 + y^2), \quad z \geq 2$ och parametriseras av ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (4 - x^2 - y^2)\,\hat{z}$ med $(x,y) \in D$ där $D : x^2 + y^2 \leq 2$. En standardräkning ger

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = 2x\,\hat{x} + 2y\,\hat{y} + \hat{z}$$

av vilket det följer att

$$\left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}.$$

Vi har då

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{1}{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dS &= \iint_D \frac{1}{1 + 4(x^2 + y^2)} \left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right|\, dxdy \\
&= 3 \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}\, dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ \rho \leq \sqrt{2},\quad 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\rho^2}}\, d\phi \right) \rho\, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho}{\sqrt{1 + 4\rho^2}}\, d\rho \\
&= [u = 1 + 4\rho^2] \\
&= \frac{\pi}{4} \int_1^9 \frac{du}{\sqrt{u}}\, du \\
&= \frac{\pi}{2} \left[\sqrt{u}\right]_1^9 \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Lösning 2: Ytan kan parametriseras med hjälp av cylinderkoordinater: ortsvektorn för punkter på $S : z04 - \rho^2,\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$ är då $\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\,\hat{\rho} + (4 - \rho^2)\,\hat{z}$ med $(\rho,\phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har då $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\rho = (\hat{\rho} - 2\rho\,\hat{z}) \times (\rho\,\hat{\phi} = 2\rho^2\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$. Den sökta integralen är nu

$$
\begin{aligned}
\iint_S \frac{1}{1+4(x^2+y^2)}\,dS &= \iint_D \frac{1}{1+4\rho^2}|\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\rho|\,d\rho\,d\phi \\
&= \iint_D \frac{1}{1+4\rho^2}\sqrt{\rho^2+4\rho^4}\,d\rho\,d\phi \\
&= \iint_D \frac{\rho}{1+4\rho^2}\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\phi \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+4\rho^2}}\,d\phi \right) \rho\,d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho}{\sqrt{1+4\rho^2}}\,d\rho \\
&= [u = 1+4\rho^2] \\
&= \frac{\pi}{4}\int_1^9 \frac{du}{\sqrt{u}}\,du \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\sqrt{u}\right]_1^9 \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

2.) En standardräkning ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = x^2 + y^2 + z^2$. Låt S beteckna ytan $x^2+y^2+z^2 = 4,\ x \geq 0$ och $S_1 : x = 0,\ y^2 + z^2 \leq 4$. Låt V beteckna den kropp som omslutes av $S + S_1$. V ges av olikheterna $x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x \geq 0$. Då har vi enligt Gauss' Sats att

$$
\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\,dV
$$

Observera att i Gauss' Sats pekar **alla normaler ut** ur kroppen och i synnerhet blir $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{x} > 0$ på S. Normalen till S_1 är $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{x}$ (och inget annat) eftersom den pekar ut ur kroppen V. Vi får då

$$
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.
$$

Vi har

$$
\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = 0
$$

eftersom $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = -\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = -xy^2 = 0$ ty $x = 0$ på S_1.

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}} dS &= \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz \\
&= [x = r\cos\phi\sin\theta,\ y = r\sin\phi\sin\theta,\ z = r\cos\theta,\ \ 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\pi,\ -\pi/2\le\phi\le\pi/2] \\
&= \int_0^2 \left(\int^{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4\sin\theta\,d\phi\right)d\theta\right)dr \\
&= \pi\int_0^2\left(\int^{\pi} r^4\sin\theta\,d\theta\right)dr \\
&= \pi\left(\int_0^2 r^4\,dr\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right) \\
&= \frac{64\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

3.) Lösning 1: Standardräkningar ger

$$\nabla\times\mathbf{A} = 3(y^2-z^2)\hat{x} + 3(z^2-x^2)\hat{y} + 3(x^2-y^2)\,\hat{z}.$$

Ytorna skär varandra då $x^2+2y^2 = 4-(x^2+2y^2)$ vilket ger $z = x^2+2y^2 = 2$. Låt S vara den del av planet $z=2$ med $x^2+2y^2\le 2$ och sätt $D: x^2+2y^2\le 2$. Parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x}+y\,\hat{y}+2\,\hat{z}$ där $(x,y)\in D$. Vi har $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y = \hat{z}$ (efter en standardräkning). Stokes Sats ger nu (då Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0,0,17)$)

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= \iint_D \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)\,dxdy \\
&= 3\iint_D (x^2-y^2)\,dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sin\phi,\ \ 0\le\rho\le\sqrt{2},\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= 3\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\rho^3}{\sqrt{2}}\left[\cos^2\phi-\frac{\sin^2\phi}{2}\right]d\phi\right)d\rho \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}+\frac{3\cos 2\phi}{4}\right]d\phi\right) \\
&= \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Lösning 2: Som ovan, ytorna skär varandra i kurvan $x^2+2y^2=2,\ z=2$. Parametrisera kurvan med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \sqrt{2}\cos\phi\,\hat{x}+\sin\phi\,\hat{y}+2\,\hat{z}$ med $\phi: 0\to 2\pi$ (då kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(0,0,17)$). Vidare har vi att

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) = (\sin^3\phi+8)\,\hat{x} + (2\sqrt{2}\cos^3\phi+8)\,\hat{y} + (\sin^3\phi+2\sqrt{2}\cos^3\phi)\,\hat{z}.$$

Då är kurvintegralen

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot\, d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[(\sin^3\phi + 8)\,\hat{x} + (2\sqrt{2}\cos^3\phi + 8)\,\hat{y} + (\sin^3\phi + 2\sqrt{2}\cos^3\phi)\,\hat{z}\Big]\cdot\Big[-\sqrt{2}\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}\Big]\, d\phi \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (2\cos^4\phi - \sin^4\phi)\, d\phi \\
&= \left[\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2},\quad \sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}\right] \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{8} + \frac{3}{2}\cos 2\phi + \frac{1}{8}\cos 4\phi\right] d\phi \\
&= \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

4.) En standard räkning ger att alla potentialer $\Phi(x,y,z)$ till $\mathbf{A}$ ges av

$$\Phi(x,y,z) = xy^2z^3 + x^3yz^2 + x^2y^3z + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) En standard räkning (i cylinderkoordinater) ger $\nabla\times\mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $\rho \neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $\Gamma_1 : \rho = 1, z = 0$ och S vara en C^1-yta vars rand består av $\Gamma + \Gamma_1$ (och som inte skärs av z-axeln). Enligt Stokes' Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_1\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{n}\, dS = 0$$

och vi får då att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_1\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

där både Γ och Γ_1 genomlöps moturs. Parametrisera Γ_1 med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$ med $\phi : 0 \to 2\pi$ (som motsvarar orienteringen moturs sett från punkten $(0,0,100)$). Vi har då

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot\mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{\rho}\,\cos^2\phi\,\hat{\phi}\Big)\cdot\hat{\phi}\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\phi}{2}\, d\phi \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

eftersom $\rho = 1$ på Γ_1. Således erhåller vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \pi.$$

6.) Lösning 1: I sfäriska koordinater är vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}.$$

Ytan är (i sfäriska koordinater) $S : r = 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ \pi/3 \le \theta \le \pi/2$ eftersom vi har $0 \le z \le 1$ och med $z = 2\cos\theta$ så är $0 \le \cos\theta \le 1/2$, vilket ger $\pi/3 \le \theta \le \pi/2$ ty $0 \le \theta \le \pi$ i sfäriska koordinater. Parametrisera ytan genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = 2\,\hat{\mathbf{r}}$$

med $(\theta, \phi) \in D$ där $D : 0 \le \phi \le 2\pi,\ \pi/3 \le \theta \le \pi/2$. Vi har då

$$\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = (2\,\hat{\theta}) \times (2\sin\theta\,\hat{\phi}) = 4\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}.$$

Observera att på ytan S är

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4}\,\hat{\mathbf{r}}.$$

Det sökta flödet är då

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi)\,d\theta d\phi \\
&= \int_{\pi/3}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\,\hat{\mathbf{r}}\right)\cdot(4\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}})\,d\phi\right)d\theta \\
&= 2\pi\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Lösning 2: I cylinderkoordinater kan ytan $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ 0 \le z \le 1$ beskrivas som $S : z = \sqrt{4-\rho^2},\ \sqrt{3} \le \rho \le 2$. Parametrisera denna yta med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + \sqrt{4-\rho^2}\,\hat{z}$ där $(\rho, \phi) \in D$ med $D : \sqrt{3} \le \rho \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Vi har

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= \left(\hat{\rho} - \frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\right) \times (\rho\,\hat{z}) \\
&= \frac{\rho^2}{\sqrt{4-\rho^2}}\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}
\end{aligned}$$

som pekar bort från origo eftersom $\hat{\rho}-$komponenten är positiv. Vidare är

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi)) = \frac{1}{8}\left(\rho\,\hat{\rho} + \sqrt{4-\rho^2}\,\hat{z}\right).$$

Det sökta flödet är då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)\,d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{8}\iint_D \left(\rho\,\hat{\rho}+\sqrt{4-\rho^2}\,\hat{z}\right)\cdot\left(\frac{\rho^2}{\sqrt{4-\rho^2}}\,\hat{\rho}+\rho\,\hat{z}\right)\,d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\phi\right)\,d\rho \\
&= \pi\int_{\sqrt{3}}^{2}\frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho \\
&= \pi\left[-\sqrt{4-\rho^2}\right]_{\sqrt{3}}^{2} \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$