TATA44 Lösningar 28/8h/2019.

1.) Inför cylinderkoordinater. Då skär ytorna $\rho^2 + z^2 = 4$ och $z = \rho$ varandra i $\rho^2 = 2$, d.v.s. $\rho = \sqrt{2}$. Vi parametriserar ytan S med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi, z) = \sqrt{4 - z^2}\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$ där $(\phi, z) \in D$ med $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ \sqrt{2} \leq z \leq 2$. Vi har

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z &= \sqrt{4 - z^2}\,\hat{\phi} \times \left(\frac{-z}{\sqrt{4 - z^2}}\,\hat{\rho} + \hat{z} \right) \\
&= \sqrt{4 - z^2}\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}.
\end{aligned}
$$

Vi har nu

$$
\begin{aligned}
\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\, dS &= \iint_D \sqrt{4 - z^2} |\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z|\, d\phi dz \\
&= 2 \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{4 - z^2}\, d\phi \right) dz \\
&= 4\pi \int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4 - z^2}\, dz \\
&= [z = 2\sin\theta,\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2] \\
&= 16\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= 8\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} [1 + \cos 2\theta]\, d\theta \\
&= 2\pi^2 - 4\pi.
\end{aligned}
$$

2.) f Lösning 1;:En standardräkning ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2z + x^2 + y^2$ eller $\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho^2 + 2z$ i cylinderkoordinater. Låt S vara ytan $z = 4 - (x^2 + y^2),\ \ z \geq 0$. Sätt $S_1 : x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0$. Låt V beteckna volymen som omslutes av $S + S_1$. Enligt Gauss' Sats har vi nu

$$
\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV
$$

av vilket vi har

$$
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS_1.
$$

Observera att $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{z}$ på S_1 och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -y^2 z = 0$ på S_1 ty $z = 0$ på S_1. Volymen V definieras genom olikheterna $0 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2),\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Då har vi

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV &= \iint_{x^2+y^2\le 4}\left(\int_0^{4-(x^2+y^2)}\left[2z+x^2+y^2\right]\,dz\right)dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 4}[(4-x^2-y^2)^2+>(x^2+y^2)(4-x^2-y^2)]\,dxdy\\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ 0\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi]\\
&= 2\pi\int_0^2[(4-\rho^2)^2+\rho^2(4-\rho^2)]\rho\,d\rho\\
&= 8\pi\int_0^2(4\rho-\rho^3)\,d\rho\\
&= 32\pi.
\end{aligned}
$$

Lösning 2: Med $\nabla\cdot\mathbf{A}=\rho^2+2z$ i cylinderkoordinater. Ytans ekvation i cylinder koordinater är $S: z=4-\rho^2$. Sätt $S_1:\rho\le 2,\ z=0$. Då utgör $S+S_1$ en sluten yta som omsluter volymen $V: 0\le z\le 4-\rho^2,\ 0\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Vi har som ovan

$$\iint_{S+S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS=\iiint_V\nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$$

av vilket vi har

$$\iint_S\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS=\iiint_V\nabla\cdot\mathbf{A}\,dV-\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS_1.$$

och vi har

$$\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS_1$$

som ovan. Detta ger då att det sökta flödet är

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV &= \iint_{\rho\le 2}\left(\int_0^{4-\rho^2}\left[2z+\rho^2\right]\,dz\right)\rho d\rho d\phi\\
&= \iint_{\rho\le 2}[(4-\rho^2)^2+\rho^2(4-\rho^2)]\,\rho d\rho d\phi\\
&= 2\pi\int_0^2[(4-\rho^2)^2+\rho^2(4-\rho^2)]\rho\,d\rho\\
&= 8\pi\int_0^2(4\rho-\rho^3)\,d\rho\\
&= 32\pi.
\end{aligned}
$$

3.) En standardräkning ger

$$\nabla\times\mathbf{A}=3(x^2+y^2)\,\hat{z}.$$

Ytorna skär varandra då $x^2+y^2-2x-2y=7$ vilket ger $(x-1)^2+(y-1)^2=9$. Låt S vara den del av planet $2x+2y+z=0$ med $(x,y)\in D$ där $D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 9$. Parametrisera S

med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} - (2x+2y)\,\hat{z}$ där $(x,y) \in D$. Vi har $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}$ (efter en standardräkning). Stokes Sats ger nu

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS \\
&= \iint_D \nabla \times \mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y)\, dxdy \\
&= \iint_D 3(x^2+y^2)\, dxdy \\
&[x = 1+\rho\cos\phi,\ y = 1+\rho\sin\phi,\ \rho \le 3,\ 0 \le \phi \le 2\pi] \\
&= 3\int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} \left[\rho^2 + 2\rho(\cos\phi + \sin\phi) + 2\right] d\phi \right) \rho\, d\rho \\
&= 6\pi \int_0^3 \rho(\rho^2+2)\, d\rho \\
&= \frac{351\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4. En standard räkning ger alla potentialer Φ till $\mathbf{A}$ med

$$\Phi = x^2y + xz^2 + 2xz + xy + y^2z + C$$

5.) Vi har $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Kurvan har ändpunkterna på y-axeln med $y^2 = 1$. Startpunkten är $(0,-1)$ och slutpunkten är $(0,1)$. Sätt $\Gamma_1 : x^2+y^2 = 1,\ x \ge 0$, som ges genom $\rho = 1, -\pi/2 \le \phi \le \pi/2$ i polära koordinater. Ortsvektorn i polära koordinater är då $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho},\ -\pi/2 \le \phi \le \pi/2$. Låt S vara området mellan Γ och Γ_1. Enligt Stokes' Sats har vi då att

$$\int_{\Gamma - \Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0$$

och då erhålls

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2\sin\phi\,\hat{\rho} + 2\cos\phi\,\hat{\phi} \right) \cdot \hat{\phi}\, d\phi \\
&= 2\int_{-\pi 2}^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi \\
&= 4.
\end{aligned}$$

6.) Parametrisera ytan (som vi betecknar med S) med ortsvektorn (i cylinderkoordinater) $\mathbf{r}(\phi,z) = \hat{\rho} + z\,\hat{z}$ med $(\phi,z) \in D$ där $D : 0 \le \phi \le 2\pi,\ -1 \le z \le 1$. I cylinderkoordinater är

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} [\rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$$

och $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho}$. Då är det sökta flödet

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)\,d\phi dz \\
&= \iint_D \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}\,d\phi dz \\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}\,dz \\
&= [z=\tan\theta,\ -\pi/4\le\theta\le\pi/4] \\
&= 2\pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\,d\theta \\
&= 2\pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\,d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}
$$