TATA44 Lösningar 12/1/2012.

1.) En enkel räkning ger att ytorna skär varandra då $x^2 + y^2 = 4$. Inför cylinderkoordinater. Parametrisera konen $z = 4 - \rho$ där $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\hat{\rho} + (4 - \rho)\hat{z}$. Sätt $D : 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har

$$\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - \hat{z}) \times (\rho\hat{\phi}) = \rho\hat{\rho} + \rho\hat{z}$$

och den sökta arean är

$$\begin{aligned} A &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\ &= \sqrt{2} \iint_D \rho d\rho d\phi \\ &= \sqrt{2} \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \rho d\phi \right) d\rho \\ &= 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

2.) Observera att $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ och då är $\mathbf{A}$ ett potentialfält med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ där $\Phi = xy + xz + yz$. Kurvans ändpunkter är $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$ (startpunkt) och $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ (slutpunkt). Vi har nu

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) - \Phi(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 0.$$

3.) Lösning 1: Observera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Låt S beteckna den del av ytan $x^2 + y^2 + 2z^2 = 3$ där $z \geq 0$ och $x^2 + y^2 \leq 1$. Lägg till locket $L : x^2 + y^2 \leq 0,\ z = 0$ och cylindern $S_1 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1$ Då är ytan $S + S_1 + L$ sluten. Låt V beteckna den kropp som $S + S_1 + L$ omsluter. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1+L} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 0,$$

av vilket vi får att

$$\iint_{S+S_1+L} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = -\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n_1} dS_1 - \iint_L \mathbf{A} \cdot \hat{n_L} dS$$

där alla normaler pekar ut ur V. Eftersom $\mathbf{A} = 0$ på L ty $z = 0$ på L, vi har

$$\iint_{S+S_1+L} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = -\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n_1} dS_1.$$

Parametrisera S_1 med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi, z) = (\cos\phi, \sin\phi, z) = \hat{\rho} + z\hat{z}$ med $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och $0 \leq z \leq 1$. Vi erhåller $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \hat{\rho}$ och på S_1 är $\mathbf{A} = z\hat{\rho} - 2z^2\hat{z}$. Med $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 1$ erhåller vi

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 dS_1 &= \iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)d\phi dz\\
&= \iint_D (z\hat{\rho}-2z^2\hat{z})\cdot\hat{\rho}d\phi dz\\
&= \iint_D zd\phi dz\\
&= \pi
\end{aligned}
$$

och således är flödet ut genom S

$$
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = -\pi.
$$

Lösning 2: I cylinderkoordinater kan man skriva

$$
\mathbf{A} = \rho^3 z\hat{\rho} - 2z\rho^2\hat{z}
$$

och ytan $S: x^2+y^2+2z^2 = 3,\ z\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1$ kan skrivas som $S: \rho^2+2z^2 = 3,\ z\geq 0,\ \rho\leq 1.$ ortsvektorn för punkter på S är då

$$
\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\hat{\rho} + \frac{\sqrt{3-\rho^2}}{\sqrt{2}}\hat{z},
$$

med parameterområdet $D: 0\leq\rho\leq 1,\ 0\leq\phi\leq 2\pi$, och vi har

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi &= \left(\hat{\rho} - \frac{\rho}{\sqrt{2}\sqrt{3-\rho^2}}\hat{z}\right)\times(\rho\,\hat{\phi})\\
&= \frac{\rho^2}{\sqrt{2}\sqrt{3-\rho^2}}\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}.
\end{aligned}
$$

Observera att $\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi$ har positiv $\hat{\rho}$-komponent, vilket betyder att $\hat{n} = \dfrac{\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi}{|\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi|}$ pekar bort från origo. Flödet av $\mathbf{A}$ genom S är då

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS\\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)d\rho d\phi\\
&= \iint_D \left[\rho^3\frac{\sqrt{3-\rho^2}}{\sqrt{2}}\hat{\rho} - \rho^2(3-\rho^2)\hat{z}\right]\cdot\left[\frac{\rho^2}{\sqrt{2}\sqrt{3-\rho^2}}\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}\right]d\rho d\phi\\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left[\frac{3\rho^5}{2} - 3\rho^3\right]d\phi\right)d\rho\\
&= 2\pi\int_0^1\left[\frac{3\rho^5}{2} - 3\rho^3\right]d\rho\\
&= -\pi.
\end{aligned}
$$

4.) Vektorfältet är ett potentialfält med potential $\Phi = r\sin^2\theta\sin\phi + C$. I punkten $(1,1,0)$ är $r=\sqrt{2},\ \theta=\pi/2,\ \phi=\pi/4$ och i $(0,1,1)$ är $r=\sqrt{2},\ \theta=\pi/4,\ \phi=\pi/2$. Således har vi

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \Phi(\sqrt{2},\pi/4,\pi/2) - \Phi(\sqrt{2},\pi/2,\pi/4)\\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

5.) En enkel räkning visar att $\nabla\times\mathbf{A} = 0$ i de punkter där $\rho\neq 0$. Sätt $\Gamma_1 : x^2+y^2 = 1$ och låt S beteckna området innanför $\Gamma+\Gamma_1$. Enligt Stokes Sats har vi nu

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = 0$$

där Γ_1 genomlöps medurs. Vi har då

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

där Γ_1 nu genomlöps moturs. På Γ_1 är $\rho = 1$ och då är $\mathbf{A} = \hat{\rho}$. Ortsvektorn för punkter på Γ_1 är $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$ och vi har

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}'(\phi)d\phi\\ &= \int_0^{2\pi} r\hat{ho}\cdot\hat{\phi}d\phi\\ &= 0.\end{aligned}$$

6.) Parametrisera ytan $S : x^2+y^2 = z+1$ genom ortsvektorn (i cylinderkoordinater) $\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\hat{\rho} + (\rho^2-1)\hat{z}$. Vi har $0\leq z\leq 3$ och $y\geq 0$ vilket ger $1\leq\rho\leq 2$ och $0\leq\phi\leq\pi$. Sätt nu $D : 1\leq\rho\leq 2,\ 0\leq\phi\leq\pi$. En standardräkning ger $\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi = -2\rho^2\hat{\rho}+\rho\hat{z}$. Flödet är nu (med hänsyn tagen till det faktum att normalen till ytan ska peka bort från z-axeln)

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS &= \iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_\rho)d\rho d\phi\\ &= \iint_D \frac{\cos^2\phi}{\rho}\hat{\rho}\cdot(2\rho^2\hat{\rho}-\rho\hat{z})d\rho d\phi\\ &= \iint_D 2\rho\cos^2\phi d\rho d\phi\\ &= \int_1^2\left(\int_0^\pi \rho(1+\cos 2\phi)d\phi\right)d\rho\\ &= \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$