TATA44 Lösningar 10/1/2014.

1.) Sfären $x^2+y^2+(z-5)^2=25$ skär konen $z=5+2\sqrt{x^2+y^2}$ då $5(x^2+y^2)=25$ och då är $x^2+y^2=5$. Vi söker arean av $S: z=5+2\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\leq 5$ och vi parametriserar S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi)=\rho\,\hat{\rho}+(5+2\rho)\,\hat{z}$ med $(\rho,\phi)\in D$ där $D: 0\leq\rho\leq\sqrt{5},\ 0\leq\phi\leq 2\pi$. Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi &= (\hat{\rho}+2\,\hat{z})\times(\rho\,\hat{\phi})\\ &= -2\rho\,\hat{\rho}+\rho\,\hat{z}.\end{aligned}$$

Arean av S är nu

$$\begin{aligned}A(S) &= \iint_S dS\\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi|d\rho d\phi\\ &= \sqrt{5}\iint_D \rho\,d\rho d\phi\\ &= 2\sqrt{5}\pi\int_0^{\sqrt{5}}\rho\,d\rho\\ &= 5\sqrt{5}\pi.\end{aligned}$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla\cdot\mathbf{A}=2z^2$. Lägg till ytan $S_1: x^2+2y^2\leq\leq 1,\ z=0$. Ytorna $S+S_1$ avgränsar en kropp $V: x^2+2y^2+2z^2\leq 1,\ z\geq 0$. Flödet av $\mathbf{A}$ ut ur V genom S är

$$\Phi=\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS$$

Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS=\iiint_V 2z^2dxdydz.$$

På S_1 är $z=0$ och $\hat{n}=-\hat{z}$ och då är $\mathbf{A}\cdot\hat{n}=z(x^2+y^2)=0$ på S_1, vilket nu ger att

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS\\ &= 2\iiint_V z^2dxdydz\\ &= [x=r\cos\phi\sin\theta,\ y=\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\phi\sin\theta,\ z=\frac{r}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq\pi/2,\ 0\leq\phi\leq 2\pi]\\ &= \frac{1}{2}\int_0^2\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi} r^4\cos^2\theta\sin\theta\,d\phi\right)d\theta\right)dr\\ &= \frac{\pi}{15}.\end{aligned}$$

3.) Lösning 1: Kurvan Γ kan skrivas som $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ där

$\Gamma_1 : x^2+y^2 = 1,\ z = 0, x : 1 \to 0, \quad \Gamma_2 : y^2+z^2 = 1,\ x = 0, y : 1 \to 0, \quad \Gamma_3 : x^2+z^2 = 1,\ y = 0, z : 1 \to 0.$

Vidare är

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

På Γ_1 sätter vi $x = \cos\phi,\ y = \sin\phi,\ \phi : 0 \to \pi/2$ och då är $\mathbf{r}(\phi) = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$ på Γ_1 och vi har

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\phi\, d\phi \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

På Γ_2 sätter vi $y = \cos\phi,\ z = \sin\phi,\ \phi : 0 \to \pi/2$ och då är $\mathbf{r}(\phi) = \cos\phi\,\hat{y} + \sin\phi\,\hat{z}$ på Γ_2 och vi har

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\phi\, d\phi \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

På Γ_3 sätter vi $z = \cos\phi,\ x = \sin\phi,\ \phi : 0 \to \pi/2$ och då är $\mathbf{r}(\phi) = \sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{z}$ på Γ_3 och vi har

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\phi\, d\phi \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Således erhåller vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{3\pi}{4}.$$

Lösning 2: Γ är randen till ytan $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och genomlöps moturs. $\nabla \times \mathbf{A} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$. Enligt Stokes' Sats kan vi skriva

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS.$$

Eftersom S är en del av enhetssfären med centrum i origo kan vi parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi) = \hat{\mathbf{r}}$ där $(\theta,\phi) \in D$ och $D: 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \phi \le \pi/2$. Vidare är

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS &= \iint_D (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi)\, d\theta d\phi \\
&= \iint_D (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\sin\theta \hat{\mathbf{r}})\, d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta[\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + \cos\theta] d\phi \right) d\phi \\
&= \int_0^{\pi/2} [2\sin^2\theta + \frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\theta] d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} [1 - \cos 2\theta + \frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\theta] d\theta \\
&= \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

4.) Om $\mathbf{A}$ är ett potentialfält då ska $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion $\Phi(r,\theta,\phi)$ i det område där $\mathbf{A}$ är definierat. Vi erhåller då systemet

$$\Phi'_r = 2r\sin^2\theta\,\cos^2\phi, \quad \Phi'_\theta = (a-1)r^2\sin 2\theta\,\cos^2\phi, \quad \Phi'_\phi = (b+2)r^2\sin^2\theta\,\sin 2\phi.$$

Systemet har en lösning endast om

$$\Phi''_{r\theta} = \Phi''_{\theta r}, \quad \Phi''_{r\phi} = \Phi''_{\phi r}, \quad \Phi''_{\theta\phi} = \Phi''_{\phi\theta}.$$

Vilkoret $\Phi''_{r\theta} = \Phi''_{\theta r}$ ger

$$\begin{aligned}
4r\sin\theta\cos\theta\,\cos^2\phi &= 2(a-1)r\sin 2\theta\,\cos^2\phi \\
&= 4(a-1)r\sin\theta\cos\theta\,\cos^2\phi
\end{aligned}$$

som ger $a = 2$.

Vilkoret $\Phi''_{r\phi} = \Phi''_{\phi r}$ ger

$$\begin{aligned}
-4r\sin^2\theta\cos\,\cos\phi\sin\phi &= 2(b+2)r\sin^2\theta\,\sin 2\phi \\
&= 4(b+2)r\sin^2\theta\,\cos\phi\sin\phi
\end{aligned}$$

som ger $b = -3$. Med $a = 2,\ b = -3$ är vilkoret $\Phi''_{\theta\phi} = \Phi''_{\phi\theta}$ automatiskt uppfyllt. Då har systemet en lösning endast om $a = 2,\ b = -3$ och således är $\mathbf{A} = \nabla\phi$ endast om $a = 2,\ b = -3$.

För dessa värden är systemet

$$\Phi'_r = 2r\sin^2\theta\,\cos^2\phi, \quad \Phi'_\theta = r^2\sin 2\theta\,\cos^2\phi, \quad \Phi'_\phi = -r^2\sin^2\theta\,\sin 2\phi.$$

Ekvationen $\Phi'_r = 2r\sin^2\theta\,\cos^2\phi$ ger

$$\Phi = r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + g(\theta,\phi).$$

Insättning i $\Phi'_\theta = r^2 \sin 2\theta \, \cos^2\phi$ ger

$$g'_\theta = 0$$

vilket ger

$$\Phi = r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi + g(\phi).$$

Insättning i $\Phi'_\phi = -r^2 \sin^2\theta \, \sin 2\phi$ ger

$$g'(\phi) = 0$$

och vi erhåller

$$\Phi = r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Vi kan skriva

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$$

med

$$\mathbf{A}_1 = -y\hat{x} + x\hat{y}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{x}{x^2+y^2}\hat{x} + \frac{y}{x^2+y^2}\hat{y}.$$

En enkel räkning visar att $\nabla \times \mathbf{A}_2 = 0$ i alla punkter där $x^2+y^2 \neq 0$. Då har $\mathbf{A}_2$ en potential i varje område som inte innehåller punkten $(0,0)$. En enkel räkning visar att $\Phi(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ är en potential. Kurvans startpunkt är $(2,0)$ och slutpunkten är $(-2,0)$ och kurvan ligger inom ett område där $\mathbf{A}_2$ C^1 (varje enkelt sammanhängande område som innehåller kurvan men inte origo duger t.ex. inom hästskon som är området mellan kurvorna $x^2+y^2=1,\ y \geq -1/2$ och $x^2+y^2=16, \geq -1/2$). Vi har då

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \Phi(-2,0) - \Phi(2,0) = 0.$$

Således är

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r}.$$

Låt Γ_1 vara kurvan $-2 \leq x \leq 2,\ y=0$. Om D är området $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ y \geq 0$ då har vi enligt Greens formel att

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} &= \int_\Gamma -ydx + xdy \\ &= 2\iint_D dxdy \\ &= 6\pi\end{aligned}$$

eftersom arean av ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ är πab. Vi har

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} -ydx + xdy = 0$$

eftersom $y = 0$ på Γ_1. Vi har då

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = 6\pi.$$

Svar: $\displaystyle\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 6\pi.$

6.) Vi har

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\rho}{\rho^2 + z^2}\right) = 0$$

i alla punkter där $\rho^2 + z^2 \neq 0$. Sätt $S : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 16, z \geq 0$; $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ och $L : x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + 2y^2 \leq 16, z = 0$ och låt V vara området som avgränsas av $S + S_1 + L$. Vi har enligt Gauss' Sats att

$$\iint_{S+S_1+L} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = 0$$

och således är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \iint_L \mathbf{A} \cdot \hat{n}_L dL$$

där $\hat{n}_L = \hat{z}$ och $\hat{n}_1$ pekar bort från origo.

På L är $\mathbf{A} \cdot \hat{n}_L = \mathbf{A} \cdot \hat{z} = 0$ eftersom $\hat{\phi} \cdot \hat{z} = 0$. Vidare är $\hat{n}_1 = \hat{\mathbf{r}}$ eftersom enhetsnormalen till en sfär är $\hat{\mathbf{r}}$. Vi har $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\phi} = 0$ och således är

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 = 0.$$

Således är det sökta flödet

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = 0.$$