TATA44 Lösningar 8/1/2016.

1.) Inför cylinderkoordinater ρ, ϕ, z. Ytorna $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2} = 3 - \rho$ och $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \rho$ skär varandra då $3 - \rho = 1 + \rho$ vilket ger $\rho = 1$. Sätt $D : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Vår yta S är den del av $z = 3 - \rho$ för vilken $(\rho, \phi) \in D$.

Parametrisera ytan S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + (3 - \rho)\,\hat{z}, \quad (\rho, \phi) \in D$. Vi har $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - \hat{z}) \times (\rho\,\hat{\phi}) = \rho\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$. Den sökta arean är då

$$\begin{aligned} A &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi|\, d\rho\, d\phi \\ &= \sqrt{2} \iint_D \rho\, d\rho\, d\phi \\ &= 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 \rho\, d\rho \\ &= \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

2.) Observera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 4$ och att $\mathbf{A}$ är C^1 överallt. Sätt $S : z = 1 - x^2 - y^2\ z \ge 0$ och $S_1 : z = 0,\ x^2 + y^2 \le 1$. Vidare låt V beteckna den kropp som avgränsas av ytorna S, S_1. Då definieras V genom olikheterna $0 \le z \le 1 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \le 1$. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$$

där enhetsnormalen $\hat{n}$ pekar ut ur V. Således är det sökta flödet

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

För S_1 är $\hat{n}_1 = -\hat{z}$ och

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = -\iint_{S_1} dxdy = -\pi$$

eftersom $z = 0$ på S_1 och S_1 är enhetscirkelskivan. Således är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV + \pi.$$

Vi har nu

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= 4 \iiint_V dxdydz \\
&= 4 \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) dxdy \\
&= 4 \iint_{x^2+y^2 \le 1} (1 - x^2 - y^2)\, dxdy \\
&= [x = \rho \cos\phi,\ y = \rho \sin\phi,\quad 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi] \\
&= 4 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-\rho^2)\rho\, d\phi \right) d\rho \\
&= 8\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) dr \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

och då erhåller vi att det sökta flödet är

$$
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 3\pi.
$$

3.) En standardräkning ger att $\nabla \times \mathbf{A} = 3\hat{x} + x\,\hat{y} + 2y\,\hat{z}$. Kurvan Γ är randen till ytan S : $2x + 2y + z = 1,\ z \ge x^2 + y^2$. Ytorna $2x + 2y + z = 1$ och $z = x^2 + y^2$ skär varandra då $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 1$ vilket ger $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 3$. Sätt $D : (x+1)^2 + (y+1)^2 \le 3$. Parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (1 - 2x - 2y)\,\hat{z}$ med $(x, y) \in D$. En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}$. Enligt Stokes sats har vi nu att

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\
&= \iint_D (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot \left(\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right) dxdy \\
&= \iint_D (3\hat{x} + x\,\hat{y} + 2y\,\hat{z}) \cdot (2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z})\, dxdy \\
&= \iint_D (6 + 2x + 2y)\, dxdy \\
&= [u = x + 1,\ v = y + 1] \\
&= \iint_E (2u + 2v + 2)\, dudv \quad \text{där området } E \text{ definieras som } \ E : u^2 + v^2 \le 3 \\
&= 2 \iint_E dudv \\
&= 6\pi.
\end{aligned}
$$

Observera att $\iint_E u\, dudv = \iint_E v\, dudv = 0$ eftersom $\iint_E u\, dudv = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\int_{-\sqrt{3-v^2}}^{\sqrt{3-v^2}} u\, du \right) dv =$ 0 och en liknande räkning visar att $\iint_E v\, dudv = 0$.

4.) $\mathbf{A}$ är ett potentialfält endast om $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion $\Phi(r, \theta, \phi)$. Då måste vi ha

$$\Phi_r' = 2r\sin 2\theta\cos\phi + a\sin\theta\sin\phi, \quad \Phi_\theta' = (b+1)r^2\cos 2\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi, \quad \Phi_\phi' = cr^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi + r\sin\theta\, co$$

För att en lösning till detta system av partiella differentialequationer ska existera måste även $\Phi_{r\theta}'' = \Phi_{\theta r}''$ och $\Phi_{r\phi}'' = \Phi_{\phi r}''$. Detta ger (efter lite arbete) $a = 1, b = 1, c = -2$ och ekvationssystemet blir då

$$\Phi_r' = 2r\sin 2\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$$

$$\Phi_\theta' = 2r^2\cos 2\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi$$

$$\Phi_\phi' = -r^2\sin 2\theta\sin\phi + r\sin\theta\cos\phi$$

Ekvationen

$$\Phi_r' = 2r\sin 2\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$$

ger $\Phi = r^2\sin 2\theta\cos\phi + r\sin\theta\sin\phi + g(\theta, \phi)$.

Insättning av detta i

$$\Phi_\theta' = 2r^2\cos 2\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi$$

ger $g_\theta' = 0$ och insättning i

$$\Phi_\phi' = -r^2\sin 2\theta\sin\phi + r\sin\theta\cos\phi$$

ger $g_\phi' = 0$ Således erhåller vi

$$\Phi = r^2\sin 2\theta\cos\phi + r\sin\theta\sin\phi + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Observera att $\mathbf{A}$ kan skrivas som $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ med

$$\mathbf{A}_1 = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$$

och

$$\mathbf{A}_2 = \frac{y}{3x^2 + 2y^2}\hat{x} - \frac{x}{3x^2 + 2y^2}\hat{y}.$$

Vi har $\mathbf{A}_1 = \nabla\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2}\right)$ och då är $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = 0$ eftersom $\mathbf{A}_1$ är ett C^1-vektorfält med potential $\dfrac{x^2 + y^2}{2}$.

En standardräkning ger

$$\nabla \times \mathbf{A}_2 = 0$$

i alla punkter där $(x, y) \neq (0, 0)$. Låt Γ_1 vara kurvan $3x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 0$. Kurvan $\Gamma + \Gamma_1$ utgör randen till en yta S med $S : x^2 + y^2 \geq 1,\ 3x^2 + 2y^2 \leq 1,\ z = 0$. Enligt Stokes Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

och av detta följer att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}$$

där Γ och Γ_1 genomlöps i samma positiva riktning (moturs: observera att S ska ligga till vänster om genomlöpningsriktningen för att Stokes' Sats ska gälla; här kan man välja moturs för Γ_1 vilket innebär att Γ genomlöps medurs). På Γ_1 är $\rho = 1$,. Vi parametriserar Γ_1 genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\phi) = \frac{\cos\phi}{\sqrt{3}}\,\hat{x} + \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{y}$$

med $\phi : 0 \leq\rightarrow \pi$. Vi får nu

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\
&= \int_0^{\pi} [\frac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{x} - \frac{\cos\phi}{\sqrt{3}}\,\hat{y}] \cdot [-\frac{\sin\phi}{\sqrt{3}}\,\hat{x} + \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{y}] d\phi \\
&= -\frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{\pi} d\phi \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

Således har vi

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} [\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2] \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

6.) Vektorfältet kan skrivas i cylinderkoordinater som

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2\rho^2}\left[\rho\,\hat{\rho} + 2z\,\hat{z}\right].$$

Ytan ges nu genom ekvationen $S : z = 3 - \rho^2,\ 1 \leq \rho \leq \sqrt{3},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ och vi parametriserar S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + (3 - \rho^2)\hat{z},\ (\rho, \phi) \in D$ där $D : 1 \leq \rho \leq \sqrt{3},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - 2\rho\hat{z}) \times (\rho\,\hat{\phi}) = 2\rho^2\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$. Enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ ska riktas bort från z-axeln. Vi har

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi}{|\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi|}$$

och kravet att flödet ska vara riktat bort från z-axeln medför att vi måste ha

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi}{|\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi|}$$

eftersom $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = 2\rho^2\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$ har positiv ρ-komponent. Det sökta flödet är då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot\left(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi\right)\,d\rho d\phi \\
&= \iint_D \frac{1}{2\rho^2}\left[\rho\,\hat{\rho}+2(3-\rho^2)\,\hat{z}\right]\cdot\left[2\rho^2\,\hat{\rho}+\rho\,\hat{z}\right]\,d\rho d\phi \\
&= 3\iint_D \frac{1}{\rho}d\rho d\phi \\
&= 6\pi\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{\rho}d\rho \\
&= 3\pi\ln 3.
\end{aligned}
$$