TATA44 Lösningar 3/1/2018.

1.) Ytorna $z = x^2 + y^2$och $2x + 2y + z = 2$ skär varandra då $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$, d v s då $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$. Sätt $D : (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$. Parametrisera S med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (2 - 2x - 2y)\,\hat{z}$ med $(x,y) \in D$. En standardräkning ger

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = 2\,\hat{x} + 2y\,\hat{y} + \hat{z}$$

av vilket det följer att

$$\left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right| = 3.$$

Vi har då

$$\begin{aligned}
\iint_S (x^2+y^2)\,dS &= \iint_D (x^2+y^2)\left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right|\,dxdy \\
&= 3\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy \\
&= [x = -1 + \rho\cos\phi,\ y = -1 + \rho\sin\phi,\ \rho \leq 2,\ \ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= 3\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} [\rho^2 + 2 - 2\rho\cos\phi - 2\sin\phi]\,d\phi\right)\rho\,d\rho \\
&= 6\pi\int_0^2 [\rho^3 + 2\rho]\,d\rho \\
&= 48\pi.
\end{aligned}$$

2.) Lösning 1: En standardräkning ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2(x^2+y^2)$. Ytan $z = \dfrac{x^2+y^2}{2}$ skär sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ då $z^2 + 2z = 3$. Vi har då att $z^2 + 2z - 3 = (z+3)(z-1) = 0$ och eftersom $z \geq 0$ då har vi $z = 1$. Sätt $S_1 : z = 1,\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ och låt V beteckna den kropp som omslutes av $S + S_1$ Då har vi enligt Gauss' Sats att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\,dV$$

Observera att i Gauss' Sats pekar **alla normaler ut** ur kroppen och i synnerhet blir $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{z} < 0$ på S. Villkoret $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{z} < 0$ avser **endast** normalen till ytan S och **inte** S_1. Normalen till S_1 är $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{z}$ (och inget annat) eftersom den pekar ut ur kroppen V. Vi får då

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 2\iiint_V (x^2+y^2)\,dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 &= \iint_{x^2+y^2\leq 2} (x^2+y^2)\,dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \rho^3\right)\,d\rho \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Observera att V ges av olikheterna $\dfrac{x^2+y^2}{2} \leq z \leq 1$. Då har vi

$$\begin{aligned}
2\iiint_V (x^2+y^2)\,dV_1 &= 2\iint_{x^2+y^2\leq 2}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{1}(x^2+y^2)\,dz\right)dxdy \\
&= 2\iint_{x^2+y^2\leq 2}\left[x^2+y^2-\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\right]dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi] \\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left[\rho^3-\frac{\rho^5}{2}\right]d\phi\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{2-\rho^2}\,d\rho \\
&= \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Således är det sökta flödet är

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS &= \iiint_V (x^2+y^2)\,dV - \iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 \\
&= \frac{4\pi}{3} - 2\pi \\
&= -\frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Lösning 2: Parametrisera ytan S med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + \dfrac{(x^2+y^2)}{2}\,\hat{z}$ där $(x,y)\in D$ med $D: x^2+y^2\leq 2$ (ytorna skär varandra i $z=1$ och vi undersöker ytan S med $0\leq z\leq 1$ som ger $x^2+y^2\leq 2$). En standard räkning ger

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har även (efter lite räkning) att

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y)) = \begin{bmatrix} xy^2 + \dfrac{x(x^2+y^2)^2}{2} \\ x^2y - \dfrac{y(x^2+y^2)^2}{2} \\ \dfrac{(x^2+y^2)^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Eftersom vi ska ha $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} < 0$ då är sökta flödet

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= -\iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)\,dxdy \\
&= \iint_D \begin{bmatrix} xy^2+\dfrac{x(x^2+y^2)^2}{2} \\ x^2y-\dfrac{y(x^2+y^2)^2}{2} \\ \dfrac{(x^2+y^2)^2}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ -1 \end{bmatrix}\,dxdy \\
&= \iint_D \left[2x^2y^2+\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)^2}{2}-\frac{(x^2+y^2)^2}{2}\right]dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ \ 0\le\rho\le\sqrt{2},\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left[2\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi+\frac{\rho^6(\cos^2\phi-\sin^2\phi)}{2}-\frac{\rho^4}{2}\right]d\phi\right)\rho\,d\rho \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4\sin^2 2\phi}{2}+\frac{\rho^6\cos 2\phi}{2}-\frac{\rho^4}{2}\right]d\phi\right)\rho\,d\rho \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4(1-\cos 4\phi)}{4}+\frac{\rho^6\cos 2\phi}{2}-\frac{\rho^4}{2}\right]d\phi\right)\rho\,d\rho \\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left[\frac{\rho^5}{4}-\frac{\rho^5}{2}\right]d\rho \\
&= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\rho^5\,d\rho \\
&= -\frac{\pi}{12}\left[\rho^6\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Lösning 3: Med $S: z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ för $0\le z\le 1$ (se ovan) sätter vi $S_1: x^2+y^2\le 2,\ z=0$ samt $C: x^2+y^2=2,\ 0\le z\le 1$. Ytan $S+S_1+C$ omsluter en kropp V som ges genom olikheterna $V: 0\le z\le\dfrac{x^2+y^2}{2},\ \ 0\le x^2+y^2\le 2$. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1+C}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS=\iiint_V\nabla\cdot\mathbf{A}\,dV=2\iiint_V(x^2+y^2)\,dxdydz.$$

Eftersom alla normaler ska peka ut ur kroppen V (enligt Gauss' Sats), då har normalen till S en positiv z-komponent (rita figur!) och då är det sökta flödet $-\iint_S\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$.

$\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1\,dS_1=0$ eftersom $\hat{\mathbf{n}}_1=-\hat{z}$ och då är $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1=-(x^2+y^2)z=0$ ty $z=0$ på S_1.

Vi parametriserar C med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi,z)=\sqrt{2}\cos\phi\,\hat{x}+\sqrt{2}\sin\phi\,\hat{y}+z\,\hat{z}$ med $(\phi,z)\in D$ där $D: 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le z\le 1$ och vi får $\mathbf{r}'_\phi(\phi,z)\times\mathbf{r}'_z(\phi,z)=(-\sqrt{2}\sin\phi\,\hat{x}+\sqrt{2}\cos\phi\,\hat{y})\times\hat{z}=\sqrt{2}\cos\phi\,\hat{x}+\sqrt{2}\sin\phi\,\hat{y}$. $\hat{\mathbf{n}}_C$ pekar ut ur V vilket ger $\hat{\mathbf{n}}_C=(\mathbf{r}'_\phi(\phi,z)\times\mathbf{r}'_z(\phi,z))/|\mathbf{r}'_\phi(\phi,z)\times\mathbf{r}'_z(\phi,z)|$ och då är

$$
\begin{aligned}
\iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\,dC &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi(\phi,z)\times\mathbf{r}'_z(\phi,z))\,d\phi dz \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\cos\phi(2\sin^2\phi+z^2)\\ \sqrt{2}\sin\phi(2\cos^2\phi-z^2)\\ 2z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{2}\cos\phi\\ \sqrt{2}\sin\phi\\ 0\end{bmatrix}\,d\phi\right)dz \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left[8\cos^2\phi\sin^2\phi+2(\cos^2\phi-\sin^2\phi)z^2\right]\,d\phi\right)dz \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left[2\sin^2 2\phi+2z^2\cos 2\phi\,\right]\,d\phi\right)dz \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left[1-\cos 4\phi+2z^2\cos 2\phi\,\right]\,d\phi\right)dz \\
&= 2\pi\int_0^1 dz \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$

Sedan har vi

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV &= 2\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz \\
&= 2\iint_D\left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{2}}(x^2+y^2)\,dz\right)dxdy \\
&= \iint_D (x^2+y^2)^2\,dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ 0\le\rho\le\sqrt{2},\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\rho^5\,d\phi\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^5\,d\rho \\
&= \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Av detta får vi att

$$
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV - \iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\,dC = \frac{8\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3}
$$

och det sökta flödet är nu

$$
-\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = -\frac{2\pi}{3}.
$$

3.) Lösning 1: Standardräkningar ger

$$
\nabla\times\mathbf{A} = \hat{x}+\hat{y}+2(x+y)\,\hat{z}.
$$

Låt S vara den del av planet $2x + 2y + z = 0$ som är innanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$. Planet skär paraboloiden då $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$ det vill säga, då $(x+1)^2 + (y+1) = 4$. Sätt $D : (x+1)^2 + (y+1) \le 4$. Parametriseraytan $z = x^2 + y^2$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (x^2 + y^2)\,\hat{z}$. Vi får $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = -2x\,\hat{x} - 2y\,\hat{y} + \hat{z}$. Stokes Sats ger nu (då Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 100)$)

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS\\ &= \iint_D \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)\,dxdy\\ &= \iint_D 0\,dxdy\\ &= 0\end{aligned}$$

Av detta får vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

Lösning 2: Standardräkningar ger

$$\nabla\times\mathbf{A} = \hat{x} + \hat{y} + 2(x+y)\,\hat{z}.$$

Låt S vara den del av planet $2x + 2y + z = 0$ som är innanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$. Planet skär paraboloiden då $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$ det vill säga, då $(x+1)^2 + (y+1) = 4$. Sätt $D : (x+1)^2 + (y+1) \le 4$. Parametrisera planet med ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (2 - 2x - 2y)\,\hat{z}$. Vi får $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = 2\,\hat{x} + 2\,\hat{y} + \hat{z}$. Stokes Sats ger nu (då Γ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 100)$)

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS\\ &= \iint_D \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y)\,dxdy\\ &= \iint_D [4 + 2x + 2y]\,dxdy\\ &= [x = -1 + \rho\cos\phi,\ y = -1 + \rho\sin\phi,\ 0 \le \rho \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi]\\ &= 2\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \rho^2(\cos\phi + \sin\phi\,d\phi\right)\rho\,d\rho\\ &= 0\end{aligned}$$

Av detta får vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

då Γ genomlöps medurs sett från punkten $(0, 0, 100)$.

4.) Vi har i sfäriska koordinater

$$\mathbf{A} = \nabla\Phi(r,\theta,\phi) = \Phi'_r\,\hat{r} + \frac{1}{r}\Phi'_\theta\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\Phi'_\phi\,\hat{\phi}$$

av vilket vi får systemet

$$
\begin{aligned}
\Phi'_r &= 3r^2 \sin^2\theta \sin^2\phi \\
&= \\
\Phi'_\theta &= 2r^3 \sin\theta \cos\theta \sin^2\phi \\
&= \\
\Phi'_\phi &= 2r^3 \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi.
\end{aligned}
$$

En standard räkning ger nu att

$$\Phi(r, \theta, \phi) = r^3 \sin^2\theta \sin^2\phi.$$

5.) En standard räkning (i cylinderkoordinater) ger $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $\rho \neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $\Gamma_1 : \rho = 1, z = 0$ och S vara en C^1-yta vars rand består av $\Gamma + \Gamma_1$ (och som inte skärs av z-axeln). Enligt Stokes' Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

och vi får då att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där både Γ och Γ_1 genomlöps moturs. Parametrisera Γ_1 med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$ med $\phi : 0 \to 2\pi$ (som motsvarar orienteringen moturs sett från punkten $(0, 0, 35)$). Vi har då

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{\rho^2}\,\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\,\hat{\phi}) \cdot \hat{\phi}\, d\phi \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

eftersom $\rho = 1$ på Γ_1. Således erhåller vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

6.) I cylinderkoordinater är vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\rho^2}\,\hat{\rho} + \frac{2z}{\rho^3}\,\hat{z}.$$

Ytan är (i cylinderkoordinater) $S : z = 2 - \rho,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ 1 \le \rho \le 2$. Parametrisera ytan genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + (2 - \rho)\,\hat{z}$$

med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \le \phi \le 2\pi,\ 1 \le \rho \le 2$. Vi har då

$$\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - \hat{z}) \times \rho\,\hat{\phi} = \rho\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}.$$

Observera att på ytan S är

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\rho^2}\,\hat{\rho} + \frac{2(2-\rho)}{\rho^3}\,\hat{z}.$$

Det sökta flödet är då

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi)\, d\rho d\phi \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{}{\rho^2}\,\hat{\rho} + \frac{2(2-\rho)}{\rho^3}\,\hat{z} \right) \cdot (\rho\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z})\, d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_1^2 \frac{4-\rho}{\rho^2} d\rho \\
&= 2\pi[2 - \ln 2].
\end{aligned}$$