LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.
2019-01-08, kl 14.00–18.00

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget $n,\ n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.
Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.
Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

---

1. Beräkna ytintegralen $\iint_S \sqrt{2 + x^2 + y^2}\, dS$ där S är den del av konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som är innanför sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = x^3\,\hat{x} + y^3\,\hat{y} + 3z^2\,\hat{z}$ genom ytan S, där S är den del av paraboloiden $z = 2 - x^2 - y^2$ som är innanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Riktningen ges av vilkoret $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{z} > 0$. Motivera noga.

3. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där vektorfältet $\mathbf{A}$ är

$$\mathbf{A}(x, y, z) = -y^3\,\hat{x} + x^3\,\hat{y} + z^4\,\hat{z}$$

och Γ är skärningskurvan mellan paraboloiden $2z = 3 - 2(x^2 + y^2)$ och planet $x + y + z = 1$. Γ genomlöps medurs sett från punkten $(0, 0, 17)$.

4. Bestäm alla potentialer till vektorfältet

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = r\cos\theta\sin 2\theta\sin^2\phi\,\hat{r} + r\sin^2\phi(\cos^3\theta - \sin\theta\sin 2\theta)\,\hat{\theta} + r\cos^2\theta\sin 2\phi\,\hat{\phi}.$$

Motivera noga.

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y) = \left(-y + \frac{y}{x^2 + y^2}\right)\hat{x} + \left(x - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)\hat{y}$$

och Γ är kurvan $9x^2 + 4y^2 = 36$. Γ genomlöps moturs.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\hat{x} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\hat{y} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\hat{z}$$

genom ytan $S : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\ z \geq 0$. Riktningen definieras av vilkoret $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{z} > 0$.