TATA44 Lösningar 9/1/2013.

1.) Sfären $x^2+y^2+z^2=1$ skär sfären $x^2+y^2+(z-1)^2=$ då $z^2-(z-1)^2=0$ och enkla räkningar ger nu $z=1/2$. Vi söker arean av $S: x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 1/2$ (då är $x^2+y^2\leq 3/4$) och vi parametriserar S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi)=\rho\,\hat{\rho}+\sqrt{1-\rho^2}\,\hat{z}$ med $(\rho,\phi)\in D$ där $D: 0\leq\rho\leq\sqrt{3}/2,\ 0\leq\phi\leq 2\pi$. Vi har

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi &= \left(\hat{\rho}-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\hat{z}\right)\times(\rho\,\hat{\phi})\\
&= \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\hat{\rho}+\rho\,\hat{z}.
\end{aligned}
$$

Arean av S är nu

$$
\begin{aligned}
A(S) &= \iint_S dS\\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi|d\rho d\phi\\
&= \iint_D \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho d\phi\\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho\\
&= 2\pi\left[-\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^{\sqrt{3}/2}\\
&= 2\pi\left[1-\frac{1}{2}\right]\\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla\cdot\mathbf{A}=x^2+4y^2+9z^2$. Lägg till ytan $S_1: x^2+4y^2\leq\leq 4,\ z=0$. Ytorna $S+S_1$ avgränsar en kropp $V: x^2+4y^2+9z^2\leq 4,\ z\geq 0$. Flödet av $\mathbf{A}$ ut ur V genom S är

$$
\Phi_1=\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS
$$

Enligt Gauss' Sats har vi

$$
\iint_{S+S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS=\iiint_V(x^2+4y^2+9z^2)dxdydz.
$$

På S_1 är $z=0$ och $\hat{n}=-\hat{z}$ och då är $\mathbf{A}\cdot\hat{n}=4zy^2=0$ på S_1, vilket nu ger att

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS \\
&= \iiint_V (x^2+4y^2+9z^2)dxdydz \\
&= [x = r\cos\phi\sin\theta,\ y = \frac{r}{2}\sin\phi\sin\theta,\ z = \frac{r}{3}\cos\theta,\ 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi} r^4\sin\theta\, d\phi\right)d\theta\right)dr
\end{aligned}
$$
$$
= \frac{32\pi}{15}.
$$

3.) Ytorna skär varandra då $z^2 = (z-2)^2$, vilket ger $z = 1$. Då är $\Gamma : x^2+y^2 = 3,\ z = 1$. Vi parametriserar Γ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \sqrt{3}\hat{\rho}+\hat{z}$ med $0\le\phi\le 2\pi$ (ortsvektorn är $\mathbf{r} = (x,y,z) = (\sqrt{3}\cos\phi, \sqrt{3}\sin\phi, 1)$ som man kan skriva som $\mathbf{r} = \sqrt{3}(\cos\phi\,\hat{x}+\sin\phi\,\hat{y})+\hat{z} = \sqrt{3}\hat{\rho}+\hat{z}$). På Γ är $\rho = \sqrt{3}$ och $\mathbf{A} = 3\sqrt{3}\hat{\rho}+2\cos^2\phi\,\hat{\phi}+4\hat{z}$. Vi har

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot\mathbf{r}'(\phi)d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}(3\sqrt{3}\hat{\rho}+2\cos^2\phi\,\hat{\phi}+4\hat{z})\cdot(\sqrt{3}\hat{\phi})d\phi \\
&= 2\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi \\
&= \sqrt{3}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\phi)d\phi \\
&= 2\pi\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Anmärkning: En standardräkning ger $\nabla\times\mathbf{A} = \dfrac{2\cos^2\phi}{\rho}\hat{z}$, vilket visar att $\nabla\times\mathbf{A}$ är singulärt på z-axeln.Det går därför inte att tillämpa Stokes' Sats på ytan $S : x^2+y^2\le 3,\ z = 1$ utan att först lagga till en annan kurva som avskärmar singulariteten. Men det innebär att man ändå måste räkna med en direkt parametrisering av en kurva, och det är inte mindre besvärligt än att parametrisera Γ. Att tillämpa Stokes' Sats utan att ta hänsyn till singularitäten är ett principfel—oavsett om man får samma svar som man gör vid en **korrekt** behandling.

4.) Om $\mathbf{A}$ är ett potentialfält då ska $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ i det område där $\mathbf{A}$ är definierat. En potential finns då om $\nabla\times\mathbf{A} = 0$ i detta område. Vi erhåller

$$
\nabla\times\mathbf{A} = [2(2-b)xy+2(c-1)xz]\hat{x}+(b-2)y^2\,\hat{y}+[6(a-1)x+(c-1)z^2]\,\hat{z}
$$

och för att $\nabla\times\mathbf{A} = 0$ i ett område då måste $a = c = 1,\ b = 2$. För dessa värden har vi

$$
\mathbf{A} = (6xy+2y^2z+yz^2)\hat{x}+(3x^2+4xyz+xz^2)\hat{y}+(2xy^2+2xyz)\hat{z},
$$

och med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ då har vi

$$\Phi'_x = 6xy + 2y^2z + yz^2, \quad \Phi'_y = 3x^2 + 4xyz + xz^2, \quad \Phi'_z = 2xy^2 + 2xyz.$$

Ekvationen $\Phi'_x = 6xy + 2y^2z + yz^2$ ger $\Phi = 3x^2y + 2xy^2z + xyz^2 + g(y,z)$. Insättning av detta i $\Phi'_y = 3x^2 + 4xyz + xz^2$ ger $g'_y(y,z) = 0$ vilket ger att

$$\Phi = 3x^2y + 2xy^2z + xyz^2 + g(z).$$

Insättning i $\Phi'_z = 2xy^2 + 2xyz$ ger $g'(z) = 0$ vilket nu ger att

$$\Phi = 3x^2y + 2xy^2z + xyz^2 + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Vektorfältet $\mathbf{A}$ är ett potentialfält: $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ med potential $\Phi(\rho,\phi,\phi) = \dfrac{\sin\phi}{\rho}$ i alla punkter där $\rho \neq 0$. Kurvan Γ har startpunkten i $(1,0)$ och slutpunkten i $(0,-2/3)$i xy-planet som har polära koordinater $(\rho,\phi) = (1,0)$ respektive $(\rho,\phi) = (2/3, 3\pi/2)$. Vi har nu

$$\int_\gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(2/3, 3\pi/2) - \Phi(1,0) = -\frac{3}{2}$$

eftersom Γ ligger i ett enkelt sammanhängande området som inte innehåller origo (där $\rho = 0$).

6.) Parametrisera S genom ortsvektorn (i cylinder koordinater):

$$\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\,\hat{\rho} + (1-\rho^2)\hat{z}$$

med $(\rho,\phi) \in D$ där $D: 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. På S har vi (i cylinderkoordinater)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + (1-\rho^2)\rho\,\hat{z}.$$

Observera att

$$\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} - 2\rho\hat{z}) \times (\rho\hat{\phi}) = 2\rho^2\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$$

och att $(\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi)\cdot\hat{n} = \rho \ge 0$. Observera att $\mathbf{A}$ är singulärt på z-axeln. Vi definierar $S_\epsilon : z = 1-\rho^2,\ 0 < \epsilon \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$ och $D_\epsilon : 0 < \epsilon \le \rho \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Flödet ut genom S är då

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS = \lim_{\epsilon\to 0}\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS_\epsilon$$

och vi har

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS_\epsilon &= \iint_{D_\epsilon} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)d\rho d\phi \\
&= \iint_{D_\epsilon} (\frac{1}{\rho}\hat{\rho} + (1-\rho^2)\rho\,\hat{z})\cdot\left(2\rho^2\hat{\rho}+\rho\,\hat{z}\right)d\rho d\phi \\
&= \iint_{D_\epsilon} [2\rho+\rho^2-\rho^4]d\rho d\phi \\
&= 2\pi\int_\epsilon^1 [2\rho+\rho^2-\rho^4]d\rho \\
&= \frac{34\pi}{15} - 2\pi\left(\epsilon^2+\frac{\epsilon^3}{3}-\frac{\epsilon^5}{5}\right)
\end{aligned}
$$

och nu följer att flödet är

$$
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{34\pi}{15}.
$$