**TATA44 Lösningar 22/10/2011.**

**1.)** Ytorna skär varandra då $3z^2+2z=5$, vilket ger $(z-1)(3z+5)=0$. Då är $z=1$ eftersom $z \geq 0$. Sätt $D: x^2+y^2 \leq 2, \quad x \geq 0, \; y \geq 0$. Parametrisera ytan med hjälp av ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = \left(x, y, \dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$ med $(x,y) \in D$. Arean $A$ av ytan $S: 2z = x^2+y^2$ ges genom

$$A = \iint_S dS = \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dxdy$$

En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-x, -y, 1)$ av vilket det följer att

$$\begin{aligned}
A &= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\, dxdy \\
&= \left[x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi;\ 0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \phi \leq \pi/2\right] \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left( \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+r^2} d\phi \right) dr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+r^2} dr \\
&= \left[t = 1+r^2\right] \\
&= \frac{\pi}{4} \int_1^3 t^{1/2} dt \\
&= \frac{\pi}{6}[3\sqrt{3}-1].
\end{aligned}$$

**2.) Lösning 1:** Ytan är $x^2+2y^2+3z^2=1$ och villkoret $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$ gäller för $S: x^2+2y^2+3z^2=1$ med $z > 0$. Sätt $S_1: x^2+2y^2 \leq 1,\ z=0$ och låt $V$ beteckna kroppen som $S+S_1$ omsluter. Ytan $S+S_1$ är sluten och vektorfältet är $C^1$. Enligt Gauss' Sats gäller att flödet ut ur $V$ ges (enligt Gauss' Sats) genom

$$\begin{aligned}
\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \\
&= 3 \iiint (x^2+2y^2+3z^2) dxdydz \\
&= \left[x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi,\ z = \frac{r}{\sqrt{3}}\cos\theta,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2\right] \\
&= \frac{3}{\sqrt{6}} \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi/2} r^4 \sin\theta d\theta \right) d\phi \right) dr \\
&= \frac{\pi\sqrt{6}}{5}.
\end{aligned}$$

Observera att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS + \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1$$

där $\hat{n}_1 = -\hat{z}$. En enkel räkning ger att $\displaystyle\iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{n}_1 dS_1 = 0$ eftersom $z = 0$ på $S_1$, och vi erhåller

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n} dS = \frac{\pi\sqrt{6}}{5}.$$

**Lösning 2:** Inför parametriseringen av ytan $S : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi) = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta\,\hat{z}$ med $(\theta,\phi) \in D$ där $D : 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Då har vi (efter lite arbete) att

$$\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\left[\sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sqrt{2}\sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \sqrt{3}\cos\theta\,\hat{z}\right]$$

och på $S$ har vi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi)) = \sin^3\theta\cos^3\phi\,\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^3\theta\sin^3\phi\,\hat{y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos^3\theta\,\hat{z}.$$

Det sökta flödet är nu

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi)\,d\theta\,d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\iint_D \left[\sin^5\theta(\cos^4\phi + \sin^4\phi) + \sin\theta\cos^4\theta\right] d\theta\,d\phi.
\end{aligned}$$

Observera att

$$\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\,d\theta = \frac{8}{15}, \quad \int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{5}.$$

Vi får nu

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{8}{15}(\cos^4\phi + \sin^4\phi) + \frac{1}{5}\right]d\phi \\
&= [\cos^4\phi + \sin^4\phi = (\cos^2\phi + \sin^2\phi)^2 - 2\sin^2\phi\cos^2\phi = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\phi = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\phi] \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{5} + \frac{2}{15}\cos 4\phi\right]d\phi \\
&= \frac{\sqrt{6}\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Detta lösningssätt rekommenderas inte.

**3.) Lösning 1:** Parametrisera kurvan med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = (\cos\phi, \sin\phi, 1 - \cos\phi - \sin\phi)$. Vi har då

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot \mathbf{r}'(\phi)d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (\cos\phi, \sin\phi, 1-\cos\phi-\sin\phi)\cdot(-\sin\phi, \cos\phi, \sin\phi-\cos\phi)d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} [\sin\phi-\cos\phi+\cos^2\phi-\sin^2\phi]d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} [\sin\phi-\cos\phi+\cos 2\phi]d\phi \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

**Lösning 2:** Man kan skriva vektorfältet $\mathbf{A}$ som

$$\mathbf{A} = \nabla(\sqrt{1+x^2+y^2}) + \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\hat{z}.$$

Eftersom kurvan $\Gamma$ är sluten (den är skärningen mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och planet $x+y+z=1$) då är $\int_\Gamma \nabla(\sqrt{1+x^2+y^2})\cdot d\mathbf{r} = 0$ och vi har då att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\hat{z}\cdot d\mathbf{r}.$$

På $\Gamma$ är $x^2+y^2=1$ och $z=1-x-y$. Parametrisera kurvan som ovan med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = (\cos\phi, \sin\phi, 1-\cos\phi-\sin\phi)$. Vi har då

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_\Gamma \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\hat{z}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (1-\cos\phi-\sin\phi)\hat{z}\cdot\mathbf{r}'(\phi)d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (1-\cos\phi-\sin\phi)(\sin\phi-\cos\phi)d\phi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} [\sin\phi-\cos\phi+\cos 2\phi]d\phi \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

**4.)** Om $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ då ger de sedvanliga räkningar att varje potential $\Phi$ har formen

$$\Phi = e^x\cos y - xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

där $C$ är en godtycklig konstant.

Planet $2y+3z=0$ innehåller $x$-axeln och skär $x^2+2y^2+3z^2=9$ på $x$-axeln i punkterna $(-3,0,0)$ och $(3,0,0)$. Dessa punkter är kurvans start- och slutpunkter, och då erhåller vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(3,0,0) - \Phi(-3,0,0) = e^3 - e^{-3} = 2\cosh 3.$$

**5.) Lösning 1:** Vi har $\mathbf{A} = P(x,y)\hat{x} + Q(x,y)\hat{y}$ med

$$P(x,y) = -y + \frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = x - \frac{x}{x^2+y^2}.$$

En enkel räkning ger

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

i alla punkter där $x^2+y^2 \neq 0$. Lägg till $\Gamma$ kurvan $\Gamma_1 : x^2+y^2 = 4,\ y \leq 0$, som är en halvcirkel med radie 2 och centrum i $(0,0)$. Både $\Gamma$ och $\Gamma_1$ börjar i $(2,0)$ och slutar i $(-2,0)$, och $\gamma_1$ ligger över $\Gamma$. Låt $D$ beteckna området under $\Gamma_1$ och ovanför $\Gamma$. Om kurvan $\Gamma_1 + \Gamma$ genomlöps moturs (så att $D$ ligger till vänster om omlöpsriktningen) då har vi, enligt Greens formel, att

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 2\iint_D dxdy$$

eftersom $\mathbf{A}$ inte har några singulariteter inom $D$ (eller på dess rand). Således erhåller vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 2\iint_D dxdy - \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

där $\Gamma$ genomlöps medurs medan $\Gamma_1$ genomlöps moturs. Av detta följer att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} - 2\iint_D dxdy$$

där både $\Gamma$ och $\Gamma_1$ genomlöps moturs.

Vi parametriserar $\Gamma_1$ genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = 2\cos\phi\,\hat{x} + 2\sin\phi\,\hat{y}$ med $\phi : 0 \to \pi$. På $\Gamma_1$ är

$$\mathbf{A} = -\frac{3}{2}\sin\phi\,\hat{x} + \frac{3}{2}\cos\phi\,\hat{y}.$$

Vidare har vi

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^\pi \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot\mathbf{r}'(\phi)d\phi \\
&= \int_0^\pi \left(-\frac{3}{2}\sin\phi\,\hat{x} + \frac{3}{2}\cos\phi\,\hat{y}\right)\cdot(-2\sin\phi\,\hat{x} + 2\cos\phi\,\hat{y})d\phi \\
&= \int_0^\pi (3\sin^2\phi + 3\cos^2\phi)d\phi \\
&= \int_0^\pi 3d\phi \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

Integralen $\iint_D dxdy$ är arean av $D$ och vi har

$$\iint_D dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 4} dxdy - \iint_{3x^2+4y^2\leq 12} dxdy = 2\pi - \sqrt{3}\pi$$

och vi erhåller nu att

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= 3\pi - 2(2\pi - \sqrt{3}\pi)\\
&= 2\sqrt{3}\pi - \pi\\
&= \pi(2\sqrt{3}-1).
\end{aligned}
$$

**Lösning 2:**Vektorfältet $\mathbf{A}(x,y)$ kan skrivas som summan $\mathbf{A}(x,y) = \mathbf{A}_1(x,y) + \mathbf{A}_2(x,y)$ där $\mathbf{A}_1(x,y) = -y\hat{x} + x\hat{y}$ och $\mathbf{A}_2(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}\hat{x} - \dfrac{x}{x^2+y^2}\hat{y}$.

Vi har då

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{A}_1\cdot d\mathbf{r} + \int_\Gamma \mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{r}.$$

För att beräkna $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A}_1\cdot d\mathbf{r}$ lägg till kurvan $\Gamma_1 : y = 0,\ -2 \le x \le 2$. Enligt Greens formel gäller nu

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_1\cdot d\mathbf{r} = 2\iint_D dxdy$$

där $D$ är området $3x^2 + 4y^2 \le 12,\ y \ge 0$. En enkel räkning ger att $2\displaystyle\iint_D dxdy = 2\sqrt{3}\pi$. Vidare är $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_1\cdot d\mathbf{r} = 0$ och då är

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_1\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

För att beräkna $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{r}$ lägg till kurvorna $\Gamma_2,\ \Gamma_3,\ \Gamma_4$ där $\Gamma_2 : y = 0,\ -2 \le x \le -1;\ \ \Gamma_3 : x^2 + y^2 = 1,\ y \ge 0;\ \ \Gamma_4 : y = 0,\ 1 \le x \le 2$. Kurvan $\Gamma + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ är nu sluten och området $E$ som denna kurva omsluter är enkelt sammanhängande och $\mathbf{A}_2$ är $C^1$ på kurvan och inom $E$. Enligt Greens formel erhåller vi (efter en enkel räkning) att

$$\int_{\Gamma+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4} \mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Vidare har vi

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_4} \mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Således erhåller vi att

$$\int_{\Gamma+\Gamma_3} \mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{r} = 0$$

av vilket vi får nu

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_3} \mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{r}$$

där bägge kurvorna genomlöps moturs. På $\Gamma_3$ är $\mathbf{A}_2(x,y) = y\hat{x} - x\hat{y}$ ty $x^2 + y^2 = 1$. Parametrisera $\Gamma_3$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = (\cos\phi, \sin\phi),\ \ 0 \le \phi \le \pi$. Vi har

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\
&= \int_0^{\pi} (\sin\phi, -\cos\phi) \cdot (-\sin\phi, \cos\phi) d\phi \\
&= -\int_0^{\pi} d\phi \\
&= -\pi.
\end{aligned}
$$

Av detta följer att

$$
\int_{\Gamma} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \pi[2\sqrt{3} - 1].
$$

**6.) Lösning 1:** Vektorfältet är singulärt i $(0,0,0)$. Lägg till ytorna $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ samt $L_1 : x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 2$ och $L_1 : x^2 + y^2 \leq 4,\ z = -2$. Låt $V$ beteckna kroppen som avgränsas av dessa ytor. Inom $V$ är $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ och enligt Gauss Sats gäller nu

$$
\iint_{S+S_1+L_1+L_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = 0
$$

där normalerna till alla delytorna pekar ut ur $V$. På $L_1$ har vi att normalen $\hat{n} = \hat{z}$ och på $L_2$ är normalen $\hat{n} = -\hat{z}$. Vi får då att bidraget från $L_1 + L_2$ är

$$
\begin{aligned}
\iint_{L_1+L_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS &= \iint_{x^2+y^2\leq 4} \frac{4}{(x^2+y^2+4)^{3/2}} dxdy \\
&= [x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= 4 \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} \frac{r}{(4+r^2)^{3/2}} d\phi \right) dr \\
&= 8\pi \int_0^2 \frac{r}{(4+r^2)^{3/2}} dr \\
&= [t = 4 + r^2] \\
&= 4\pi \int_4^8 \frac{dt}{t^{3/2}} \\
&= 4\pi \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right].
\end{aligned}
$$

På $S_1$ är $\mathbf{A} = (x, y, z) = \mathbf{r}$ med $|\mathbf{r}| = 1$ ty $S_1$ är enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bidraget från $S_1$ är

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS_1 &= -\iint_{S_1} dS_1 \\
&= -4\pi
\end{aligned}
$$

eftersom $\hat{n}_1 = -\mathbf{r}$ för $S_1$ ty $\hat{n}_1$ pekar in mot origo. Vi har nu att

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \iint_{S_1} \mathbf{A}\cdot \hat{n} dS_1 + \iint_{L_1+L_2} \mathbf{A}\cdot \hat{n} dS = 0$$

som ger

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} - 4\pi + 4\pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 0$$

av vilket det följer att

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 2\sqrt{2}\pi.$$

**Lösning 2:** Vi kan perametrisera ytan $S : x^2 + y^2 = 4,\ -2 \leq z \leq 2$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi, z) = 2\hat{\rho} + z\hat{z}$ i cylinderkoordinater, med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ -2 \leq z \leq 2$. Observera att $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = 2\hat{\phi} \times \hat{z} = 2\hat{\rho}$ och att $\mathbf{A} = \frac{2}{(4+z^2)^{3/2}}\hat{\rho} + \frac{z}{(4+z^2)^{3/2}}\hat{z}$ på $S$. Flödet ut ur $S$ är nu

$$\begin{aligned}
\Phi = \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n} dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) d\phi dz \\
&= \iint_D \frac{4}{(4+z^2)^{3/2}} d\phi dz \\
&= 8\pi \int_{-2}^{2} \frac{1}{(4+z^2)^{3/2}} dz \\
&= 16\pi \int_0^2 \frac{1}{(4+z^2)^{3/2}} dz \\
&= 2\pi \int_0^2 \frac{1}{(1+\left(\frac{z}{2}\right)^2)^{3/2}} dz \\
&= [t = z/2] \\
&= 4\pi \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} dt \\
&= [t = \tan w,\ 0 \leq w \leq \pi/4,\ dt = (1+\tan^2 w)dw] \\
&= 4\pi \int_0^{\pi/4} \cos w dw \\
&= 4\pi \left[\sin w\right]_0^{\pi/4} \\
&= 2\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$