TATA44 Lösningar 26/10/2012.

1.) Lösning 1: Konen $2z = \sqrt{x^2+y^2}$ skär sfären $x^2+y^2+(z-5)^2 = 25$ då $4z^2+(z-5)^2 = 25$ och enkla räkningar ger nu $z^2-2z = 0$ some ger $z(z-2) = 0$ och vi ser att $z = 0$ eller $z = 2$. Observera att punkter på sfären med $z = 2$ ligger under sfärens ekvator, och planet $z = 2$ delar sfären i två delar: $S : x^2+y^2+(z-5)^2 = 25,\ z \geq 2$ och $S_1 : x^2+y^2+(z-5)^2 = 25,\ 0 \leq z \leq 2$. Arean av $S+S_1$ är arean av sfären, som är 100π (arean av en sfär med radie R är $4\pi R^2$) och således är

$$A(S) = 100\pi - A(S_1)$$

där $A(S)$ och $A(S_1)$ betecknar arean av S resp. S_1. Först beräknar vi $A(S_1)$. Vi parametriserar S_1 med ortsvektorn i cylinderkoordinater (observera att här har vi $z = 5-\sqrt{25-x^2-y^2}$):

$$\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\hat{\rho} + (5-\sqrt{25-\rho^2})\hat{z}$$

med $(\rho,\phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq 4,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vidare har vi

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= \left(\hat{\rho} + \frac{\rho}{\sqrt{25-\rho^2}}\hat{z}\right) \times (\rho\hat{\phi}) \\
&= -\frac{\rho^2}{\sqrt{25-\rho^2}}\hat{\rho} + \rho\hat{z}.
\end{aligned}$$

Arean av S_1 är nu

$$\begin{aligned}
A(S_1) &= \iint_{S_1} dS_1 \\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\
&= 5\iint_D \frac{\rho}{\sqrt{25-\rho^2}} d\rho d\phi \\
&= 10\pi \int_0^4 \frac{\rho}{\sqrt{25-\rho^2}} d\rho \\
&= 10\pi \left[-\sqrt{25-\rho^2}\right]_0^4 \\
&= 20\pi.
\end{aligned}$$

Av detta följer att den sökta arean $A(S)$ är

$$A(S) = 100\pi - 20\pi = 80\pi.$$

Svar: Den sökta arean är $A(S) = 80\pi$.

Lösning 2: Konen $2z = \sqrt{x^2+y^2}$ skär sfären $x^2+y^2+(z-5)^2 = 25$ då $4z^2+(z-5)^2 = 25$ och enkla räkningar ger nu $z^2-2z = 0$ some ger $z(z-2) = 0$ och vi ser att $z = 0$ eller $z = 2$. Eftersom sfärens radie är 5 då ser vi att ytan S är den del av sfären $x^2+y^2+(z-5)^2 = 25$ för vilken $2 \leq z \leq 10$. Nu sätter vi $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, och på sfären har vi $\rho^2+(z-5)^2 = 25$ vilket ger $\rho = \sqrt{10z-z^2}$ (efter lite algebraisk manipulering av uttrycken)-observera att $\rho \geq 0$, varför vi tar den positiva kvadratroten. I cylinder koordinater parametriserar vi ytan S genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\phi, z) = \sqrt{10z - z^2}\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$$

med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 2 \leq z \leq 10$. den sökta arean är nu

$$A = \iint_S dS = \iint_D |\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z| d\phi dz.$$

Vi har

$$\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \sqrt{10z - z^2}\,\hat{\phi} \times \left(\frac{5 - z}{\sqrt{10z - z^2}}\,\hat{\rho} + \hat{z} \right) = \sqrt{10z - z^2}\,\hat{\rho} - (5 - z)\,\hat{z},$$

och av detta har vi att

$$\begin{aligned} A = dS &= \iint_D |\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z| d\phi dz \\ &= \iint_D \sqrt{25} d\phi\, dz \\ &= 5 \int_2^{10} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) dz \\ &= 80\pi. \end{aligned}$$

Lösning 3: Konen $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$ skär sfären $x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25$ då $4z^2 + (z - 5)^2 = 25$ och enkla räkningar ger nu $z^2 - 2z = 0$ some ger $z(z - 2) = 0$ och vi ser att $z = 0$ eller $z = 2$. Eftersom sfärens radie är 5 då ser vi att ytan S är den del av sfären $x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25$ för vilken $2 \leq z \leq 10$. Inför sfäriska koordinater: $x = 5\cos\phi \sin\theta,\ y = 5\sin\phi \sin\theta,\ z = 5 + 5\cos\theta$. Vi vet att $2 \leq z \leq 10$. När $z = 10$ då är $\theta = 0$. När $z = 2$ då är

$$5 + 5\cos\theta = 2,$$

vilket ger

$$\cos\theta = -\frac{3}{5}$$

och då är $\theta = \arccos(-3/5)$ då $z = 2$ (kom ihåg att $\theta \in [0, \pi]$ och då är $\pi/2 \leq \arccos(-3/5) \leq \pi$). Sätt nu $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \arccos(-3/5)$. Vi parametriserar S genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = 5\cos\phi \sin\theta\,\hat{x} + 5\sin\phi\,\hat{y} + (5 + 5\cos\theta)\,\hat{z}$$

med $(\theta, \phi) \in D$. Standardräkningar ger

$$\mathbf{r}'_\theta = 5\hat{\theta}, \quad \mathbf{r}'_\phi = 5\sin\theta\,\hat{\phi}$$

(se Formelbladet). Vi erhåller nu

$$\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = 25\sin\theta(\hat{\theta} \times \hat{\phi}) = 25\sin\theta\,\hat{r}.$$

Den sökta arean är nu

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_S dS \\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi| d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{\arccos(-3/5)} \left(\int_0^{2\pi} 25 \sin\theta\, d\phi \right) d\theta \\
&= 50\pi \int_0^{\arccos(-3/5)} \sin\theta\, d\theta \\
&= 50\pi \left[-\cos\theta \right]_0^{\arccos(-3/5)} \\
&= 50\pi [1 - \cos(\arccos(-3/5))] \\
&= 50\pi \left[1 + \frac{3}{5} \right] \\
&= 80\pi.
\end{aligned}
$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla \cdot \mathbf{A} = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Lägg till tre sidoytor $S_1 : x^2 + 2y^2 \leq\leq 1,\ x, y \geq 0,\ z = 0;\quad S_2 : 2y^2 + 3z^2 \leq 1,\ y, z \geq 0,\ x = 0; S_3 : x^2 + 3z^2 \leq 1,\ x, z \geq 0,\ y = 0.$ Ytorna $S + S_1 + S_2 + S_3$ avgränsar en kropp $V : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1,\ x, y, z \geq 0$. Enhetsnormalerna (ut ur V till S_1, S_2, S_3 är $-\hat{z}, -\hat{x}, -\hat{y}$. Flödet av $\mathbf{A}$ ut ur V genom S_1 är

$$
\Phi_1 = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 = 0
$$

ty $\mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 = -\mathbf{A} \cdot \hat{z} = -zx^2 = 0$ eftersom $z = 0$ på S_1. Liknande beräkningar på S_2 och S_3 ger att

$$
\iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_2 dS_2 = 0, \quad \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_3 dS_3 = 0.
$$

Enligt Gauss' Sats har vi

$$
\iint_{S+S_1+S_2+S_3} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV,
$$

och eftersom flödena ut ur V genom S_1, S_2, S_3 är noll, så erhåller vi att flödet Φ av $\mathbf{A}$ genom S och ut ur V ges genom

$$
\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV.
$$

Vi har

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dxdydz \\
&= [x = r\cos\phi \sin\theta,\ y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin\phi \sin\theta,\ z = \frac{r}{\sqrt{3}} \cos\theta,\ 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2] \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} r^4 \sin\theta\, d\phi \right) d\theta \right) dr \\
&= \frac{\pi}{10\sqrt{6}}.
\end{aligned}
$$

3.) Enligt Stokes' Sats så har vi

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot dr = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{n}dS.$$

En enkel räkning ger att

$$\nabla\times\mathbf{A} = x\,\hat{x} - y\,\hat{y}.$$

Parametrisera S med ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = \hat{r}$$

med $(\theta,\phi)\in D$ där $D: 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le\pi/2$. En standarräkning ger

$$\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi = \sin\theta\hat{r}.$$

Observera att $\hat{r} = \cos\phi\sin\theta\,\hat{x} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}$ och att på S är $\mathbf{A} = \cos\phi\sin\theta\,\hat{x} - \sin\phi\sin\theta\,\hat{y}$. Då har vi att

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot dr &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{n}dS \\
&= \iint_D (\nabla\times\mathbf{A})\cdot(\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi)d\theta d\phi \\
&= \iint_D (\cos\phi\sin\theta\,\hat{x} - \sin\phi\sin\theta\,\hat{y})\cdot(\sin\theta\hat{r})d\theta d\phi \\
&= \iint_D \sin^3\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi)d\theta d\phi \ \text{ eftersom }\ \hat{r} = \cos\phi\sin\theta\,\hat{x} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\
&= \iint_D \sin^3\theta\cos 2\phi d\theta d\phi \\
&= \left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos 2\phi d\theta\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

4.) Om $\mathbf{A}$ är ett potentialfält då ska $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ i det område där $\mathbf{A}$ är definierat. En potential finns då om $\nabla\times\mathbf{A} = 0$ i detta område. Vi erhåller

$$\nabla\times\mathbf{A} = [(c-1)x + 6(1-b)y]\hat{x} + (a-c)y\,\hat{y} + (1-a)z\,\hat{z}$$

och för att $\nabla\times\mathbf{A} = 0$ i ett område då måste $a = c = 1,\ b = 1$. För dessa värden har vi

$$\mathbf{A} = (4xy + yz)\hat{x} + (2x^2 + xz + 6yz)\hat{y} + (3y^2 + xy)\hat{z},$$

och med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ då har vi

$$\Phi'_x = 4xy + yz, \quad \Phi'_y = 2x^2 + xz + 6yz, \quad \Phi'_z = 3y^2 + xy.$$

Ekvationen $\Phi'_x = 4xy + yz$ ger $\Phi = 2x^2y + xyz + g(y,z)$. Insättning av detta i $\Phi'_y = 2x^2 + xz + 6yz$ ger $g'_y(y,z) = 6yz$ vilket ger $g(y,z) = 3y^2z + h(z)$. Då har vi

$$\Phi = 2x^2y + xyz + 3y^2z + h(z).$$

Insättning i $\Phi'_z = 3y^2 + xy$ ger $h'(z) = 0$ vilket nu ger att

$$\Phi = 2x^2y + xyz + 3y^2z + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Vektorfältet $\mathbf{A}$ är ett potentialfält: $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ med potential $\Phi(r,\theta,\phi) = \dfrac{\cos\theta}{r}$. På kurvan Γ har ändpunkter i $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ i xy-planet och $(0,0,2)$ på z-axeln. Startpunkten är $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ som har sfäriska koordinater $(r,\theta,\phi) = (2, \pi/2, \pi/4)$ och slutpunkten är $(0,0,2)$ som har sfäriska koordinater $(r,\theta,\phi) = (2, 0, \pi/4)$ och vi har då

$$\int_\gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(2,0,\pi/4) - \Phi(2,\pi/2,\pi/4) = \frac{1}{2}.$$

6.) Lösning 1: Parametrisera S genom ortsvektorn (i cylinder koordinater):

$$\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\,\hat{\rho} + \frac{\sqrt{4-\rho^2}}{2}\hat{z}$$

med $(\rho,\phi) \in D$ där $D: 0 \le \rho \le 2,\ 0\phi \le 2\pi$. På S har vi (i cylinderkoordinater)

$$\mathbf{A} = \hat{\phi} + z\,\hat{z} = \hat{\phi} + \frac{\sqrt{4-\rho^2}}{2}\,\hat{z}.$$

Observera att

$$\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = \left(\hat{\rho} - \frac{\rho}{2\sqrt{4-\rho^2}}\hat{z}\right) \times (\rho\hat{\phi}) = \frac{\rho^2}{2\sqrt{4-\rho^2}}\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}.$$

Flödet ut genom S är

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}\,dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi)d\rho d\phi \\
&= \iint_D (\hat{\phi} + \frac{\sqrt{4-\rho^2}}{2}\,\hat{z})\cdot\left(\frac{\rho^2}{2\sqrt{4-\rho^2}}\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}\right)d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2}\iint_D \rho\sqrt{4-\rho^2}d\rho d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \rho\sqrt{4-\rho^2}d\phi\right)d\rho \\
&= \pi\int_0^2 \rho\sqrt{4-\rho^2}d\rho \\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{2}{3}(4-\rho^2)^{3/2}\right]_0^2 \\
&= \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(Och flödet in genom S är $-8\pi/3$).

Lösning 2: Observera att $\mathbf{A}$ är singulärt på z-axeln. Låt S_ϵ vara ytan $x^2+y^2+4z^2=1,\ x^2+y^2 \geq \epsilon^2$ och lägg till S_ϵ cylindern $C_\epsilon : x^2+y^2=\epsilon^2,\ 0 \leq z \leq \dfrac{\sqrt{4-\epsilon^2}}{2}$ och skivan $S_1 : \epsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ z=0$. Låt V_ϵ vara den kropp som begränsas av ytorna $S_\epsilon + S_1 + C_\epsilon$. Vi definierar nu det sökta flödet som

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \lim_{\epsilon\to 0}\iint_{S_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS.$$

Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S_\epsilon+S_1+C_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \iiint_{V_\epsilon}\nabla\cdot\mathbf{A}dV$$

eftersom $\mathbf{A}$ är ett C^1-fält inom V_ϵ och i en omgivning av V_ϵ. Observera att alla normaler pekar **ut ur** V_ϵ.

Integralen $\displaystyle\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS$: här är $\hat{n}=-\hat{z}$ vilket ger att $\mathbf{A}\cdot\hat{n} = -\mathbf{A}\cdot\hat{z} = -z = 0$ eftersom $z=0$ på S_1. Således har vi

$$\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = 0.$$

Integralen $\displaystyle\iint_{C_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS$: här parametriserar vi ytan genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi,z) = \epsilon\cos\phi\,\hat{x} + \epsilon\sin\phi\,\hat{y} + z\,\hat{z}$ med $(\phi,z)\in D$ där $D : 0\leq\phi\leq 2\pi,\ 0\leq z\leq\sqrt{4-\epsilon^2}/2$. Vi har då $\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z = \epsilon\cos\phi\,\hat{x}+\epsilon\sin\phi\,\hat{y}$. Då är (observera att $\hat{n}$ pekar in mot z-axeln)

$$\begin{aligned}
\iint_{C_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS &= -\iint_D \mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)d\phi dz \\
&= -\iint_D(-\sin\phi\hat{x}+\cos\phi\hat{y}+z\hat{z})\cdot(\epsilon\cos\phi\,\hat{x}+\epsilon\sin\phi\,\hat{y})d\phi dz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Av detta följer att

$$\iint_{S_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS = \iiint_{V_\epsilon}\nabla\cdot\mathbf{A}dV.$$

Inom V_ϵ är $\nabla\cdot\mathbf{A}=1$ och då är

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS &= \iiint_{V_\epsilon} dV \\
&= \iint_{\epsilon^2 \le x^2+y^2 \le 4} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}/2} dz \right) dxdy \\
&= \frac{1}{2} \iint_{\epsilon^2 \le x^2+y^2 \le 4} \sqrt{4-x^2-y^2} dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ \epsilon \le \rho \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi] \\
&= \frac{1}{2} \int_\epsilon^2 \left(\int_0^{2\pi} \rho\sqrt{4-\rho^2} d\phi \right) d\rho \\
&= \pi \int_\epsilon^2 \rho\sqrt{4-\rho^2} d\rho \\
&= [u = 4-\rho^2] \\
&= -\frac{\pi}{2} \int_{4-\epsilon^2}^0 u^{1/2} du \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{4-\epsilon^2} u^{1/2} du \\
&= \frac{\pi}{3} \left[u^{3/2} \right]_0^{4-\epsilon^2} \\
&= \frac{\pi(4-\epsilon^2)^{3/2}}{3}.
\end{aligned}
$$

Nu erhåller vi

$$
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \lim_{\epsilon \to 0} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \frac{8\pi}{3}.
$$

Observera att $\mathbf{A}$ är singulärt på z-axeln. Om man uttrycker $\mathbf{A}$ i cylinderkoordinater, då erhåller man

$$
\mathbf{A} = \hat{\phi} + z\,\hat{z}
$$

som inte ser ut att ha några singulariteter alls. Men det finns ett problem med att definiera $\hat{\phi}$ i punkter på z-axeln eftersom ϕ är inte entydigt definierat i dessa punkter och det är i denna bemärkelse att $\mathbf{A}$ inte är definierat på z-axeln.