TATA44 Lösningar 31/10/2014.

1.) Konen $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$ skär paraboloiden $z = x^2 + y^2$ då $x^2 + y^2 = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Med $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ har vi då $\rho^2 + \rho - 6 = 0$ vilket ger $(\rho + 3)(\rho - 2) = 0$ och då skär ytorna varandra då $\rho = 2$ ty $\rho \geq 0$. Låt S beteckna den del av konen som är innanför paraboloiden. Vi parametriserar S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + (6 - \rho)\,\hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi &= (\hat{\rho} - \hat{z}) \times (\rho\,\hat{\phi}) \\
&= \rho\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}.
\end{aligned}
$$

Arean av S är nu

$$
\begin{aligned}
A(S) &= \iint_S dS \\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi| d\rho d\phi \\
&= \iint_D \sqrt{2}\rho\, d\rho d\phi \\
&= 2\sqrt{2}\pi \int_0^2 \rho\, d\rho \\
&= 4\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}
$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla \times \mathbf{A} = 3(x^2 + y^2)\hat{z}$. Kurvan Γ är randen till ytan $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x, y, z \geq 0$. Enligt Stokes sats har vi nu att

$$
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS
$$

där normalen $\hat{\mathbf{n}}$ till S pekar i samma riktning som ytans ortsvektor $\mathbf{r}(\theta, \phi) = \hat{\mathbf{r}}$ då Γ genomlöps moturs sett från $(17, 17, 17)$. Vi parametriserar S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta, \phi) = \hat{\mathbf{r}}$ med $(\theta, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq \phi \leq \pi/2$. Observera att $\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = \hat{\theta} \times (\sin\theta\,\hat{\phi}) = \sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}$ och vi har

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \\
&= \iint_D (\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi)d\theta d\phi \\
&= 3\iint_D (\sin^2\theta\,\hat{z})\cdot(\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}})d\theta d\phi \quad \text{ty } \ x^2+y^2=\sin^2\theta \quad \text{i sfäriska koordinater} \\
&= 3\iint_D \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta d\phi \\
&= 3\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\,d\phi\right)d\theta \\
&= \frac{3\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{3\pi}{2}\left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

3.) Observera att $\nabla\cdot\mathbf{A}=x^2+y^2$ och att $\mathbf{A}$ är C^1 överallt. Sätt $S: z=1-\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le z\le 1$ och $S_1: z=0,\ x^2+y^2\le 1$. Vidare låt V beteckna den kropp som avgränsas av ytorna S och S_1. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS=\iiint_V\nabla\cdot\mathbf{A}dV$$

där enhetsnormalen $\hat{n}$ pekar ut ur V. Således är

$$\iint_S\mathbf{A}\cdot\hat{n}dS=\iiint_V\nabla\cdot\mathbf{A}dV-\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{n}_1dS_1.$$

För S_1 är $\hat{n}_1=-\hat{z}$ och

$$\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{n}_1dS_1=-\iint_{S_1}dxdy=-\pi$$

eftersom S_1 är en cirkelskiva med radie 1.

Kroppen V ges av olikheterna $0\le x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1-\sqrt{x^2+y^2}$ och vi har då

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \iint_D \left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2) dz \right) dxdy \quad \text{där} \quad D : x^2+y^2 \leq 1 \\
&= \iint_D (x^2+y^2) \left[1 - \sqrt{x^2+y^2} \right] dxdy \\
&= [x = \rho \cos\phi \; y = \rho \sin\phi, \; 0 \leq \rho \leq 1, \, 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 [1-\rho] d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho^3 [1-\rho] \, d\rho \\
&= \frac{\pi}{10}.
\end{aligned}
$$

Av detta följer att det sökta flödet är

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n}_1 dS_1 \\
&= \frac{11\pi}{10}.
\end{aligned}
$$

4.) Om $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ då har vi

$$\Phi'_x = axy + z^2, \quad \Phi'_y = 3x^2 + byz, \quad \Phi'_z = 2y^2 + cxz$$

som har en lösning om och endast om

$$\Phi''_{xy} = \Phi''_{yx}, \quad \Phi''_{xz} = \Phi''_{zx}, \quad \Phi''_{yz} = \Phi''_{zy}.$$

Dessa villkor ger $a = 6, \; b = 4, \; c = 2$.

Då är $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ endast om $a = 6, \; b = 4, \; c = 2$. I detta fall har vi

$$\Phi'_x = 6xy + z^2, \quad \Phi'_y = 3x^2 + 4yz, \quad \Phi'_z = 2y^2 + 2xz.$$

Ekvationen $\Phi'_x = 6xy + z^2$ ger $\Phi = 3x^2y + xz^2 + g(y,z)$. Insättning i $\Phi'_y = 3x^2 + 4yz$ ger nu $g'_y = 4yz$ och då måste $g(y,z) = 2y^2z + h(z)$, vilket ger $\Phi = 3x^2y + xz^2 + 2y^2z + h(z)$. Insättning av denna funktion i $\Phi'_z = 2y^2 + 2xz$ ger $h'(z) = 0$ och vi erhåller då att

$$\Phi = 3x^2y + xz^2 + 2y^2z + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Vi har

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

i alla punkter där $\rho \neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $x^2 + y^2 = 1, \; z = 0$. Kurvan $\Gamma + \Gamma_1$ utgör randen till mängden $S : (x,y) 2x^2 + 3y^2 \geq 1, \; x^2 + y^2 \leq 1$ i xy-planet, och här är Γ_1 den yttre kurvan (rita figur). Enligt Stokes Sats har vi, då Γ_1 genomlöps moturs och Γ genomlöps medurs,

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = 0$$

och av detta följer att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

där nu både Γ och Γ_1 genomlöps i samma positiva riktning (moturs: observera att S ska ligga till vänster om genomlöpningsriktningen för att Stokes' Sats ska gälla). Parametrisera Γ_1 med ortsvektorn (i cylinderkoordinater) $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$ där $\phi : 0 \to 2\pi$. Observera att $\rho = 1$ på Γ_1 och att $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\phi}$. Vi har nu

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot\mathbf{r}'(\phi)d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2\phi\,\hat{\phi})\cdot\hat{\phi}d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\,d\phi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [1-\cos 2\pi]\,d\phi \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Således har vi

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \pi.$$

6.) Parametrisera ytan $S : z = 4-\sqrt{x^2+y^2},\ \ 0 \le z \le 3$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\,\hat{\rho}+(4-\rho)\hat{z}$ i cylinderkoordinater, med $(\rho,\phi) \in D$ där $D : 1 \le \rho \le 4,\ \ 0 \le \phi \le 2\pi$. Observera att $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho}-\hat{z})\times(\rho\,\hat{\phi}) = \rho\,\hat{\rho}+\rho\,\hat{z}$ som är en normal till ytan S och $(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)\cdot\hat{\rho} = \rho \ge 0$, och således pekar bort från z-axeln. Det sökta flödet är då

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi)\cdot(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)\,d\rho d\phi \\
&= \iint_D \left[\frac{1}{\rho}\hat{\rho}+\frac{4-\rho}{\rho}\hat{z}\right]\cdot[\rho\,\hat{\rho}+\rho\,\hat{z}]\ d\rho d\phi \\
&= \int_1^4 \left(\int_0^{2\pi}(5-\rho)\,d\phi\right)\ d\rho \\
&= 2\pi\int_1^4 (5-\rho)\,d\rho \\
&= 15\pi.
\end{aligned}$$