TATA44 Lösningar 10/1/2015.

1.) Planet skär paraboloiden då $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 1$, vilket ger $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 3$. I de punkter som är innanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$ är $z \geq x^2 + y^2$, och i de punkter på planet $2x + 2y + z = 1$ som är innanför paraboloiden har vi $z = 1 - 2x - 2y \geq x^2 + y^2$. Av detta följer att $x^2 + 2x + y^2 + 2y \leq 1$ och således är $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 3$. Definiera $D : (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 3$. Då söker vi arean av ytan $S : 2x + 2y + z = 1, \ (x, y) \in D$. Parametrisera ytan S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (1 - 2x - 2y)\,\hat{z}, \ \ (x, y) \in D$. Vi har $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (\hat{x} - 2\hat{z}) \times (\hat{y} - 2\hat{z}) = 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}$. Den sökta arean är då

$$\begin{aligned} A &= \iint_S dS \\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|\, dxdy \\ &= 3 \iint_D dxdy \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

eftersom $\iint_D dxdy$ är arean av området D, som är en cirkelskiva med radie $\sqrt{3}$.

2.) Observera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$ och att $\mathbf{A}$ är C^1 överallt. Sätt $S : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\ z > 0$ och $S_1 : z = 0, \ x^2 + y^2 \leq 1$. Vidare låt V beteckna den kropp som avgränsas av ytorna S, S_1. Då definieras V genom olikheterna $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \ x^2 + y^2 \leq 1$. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$$

där enhetsnormalen $\hat{n}$ pekar ut ur V. Således är det sökta flödet

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

För S_1 är $\hat{n}_1 = -\hat{z}$ och

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = \iint_{S_1} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = 0$$

eftersom $z = 0$ på S_1. Således är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

Vi har nu

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV &= \iiint_V (x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2})dxdydz \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}}\left[x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2}\right]dz\right)dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2})(1-\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy \\
&= [x=r\cos\phi,\ y=r\sin\phi,\ \ 0\le r\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}(r^2+r)(1-r)r\,d\phi\right)dr \\
&= 2\pi\int_0^1(r^2-r^4)dr \\
&= 2\pi\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{4\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

Då har vi att det sökta flödet är

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \frac{4\pi}{15}.$$

3.) En standardräkning ger att $\nabla\times\mathbf{A} = 4xy\,\hat{z}$. Kurvan Γ är randen till ytan $S: x+y+z = 1,\ x,y,z\le 0$. Enligt Stokes sats har vi nu att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$$

där normalen $\hat{\mathbf{n}}$ till S pekar i samma riktning som $\hat{\mathbf{r}}$ då Γ genomlöps från punkten $(1,0,0)$ till $(0,1,0)$ och sedan till $(0,0,1)$ och till slut till $(1,0,0)$. Parametrisera S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x}+y\,\hat{y}+(1-x-y)\,\hat{z}$ med $(x,y)\in D$ där $D: x+y\le 1,\ \ x,y\ge 0$. Observera att $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y = \hat{x}+\hat{y}+\hat{z}$. Vi har nu

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \\
&= \iint_D (\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot\left(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y\right)dxdy \\
&= 4\iint_D xy\,dxdy \\
&= 4\int_0^1\left(\int_0^{1-x} xy\,dy\right)dx \\
&= 2\int_0^1 x(1-x)^2\,dx \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

4.) $\mathbf{A}$ är ett potentialfält endast om $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion $\Phi(x,y,z)$. Då måste vi ha

$$\Phi'_x = z^2 + 2xy + z, \quad \Phi'_y = 2yz + f(x,z), \quad \Phi'_z = y^2 + 2xz + 2y + x.$$

Vi ser att $\Phi''_{xz} = \Phi''_{zx}$ För att en lösning till detta system av partiella differentialequationer ska existera måste även $\Phi''_{xy} = \Phi''_{yx}$ och $\Phi''_{yz} = \Phi''_{zy}$. Detta medför att

$$2x = f'_x, \quad 2y + f'_z = 2y + 2$$

vilket ger

$$f'_x = 2x, \quad f'_z = 2.$$

Den första ekvationen ger $f(x,z) = x^2 + g(z)$ och insättning i den andra ekvationen ger $g'(z) = 2$ och då får vi att $f(x,z) = x^2 + 2z + C$ med $C =$ en godtycklig konstant. Vidare måste $f(0,0) = 0$ vilket ger $C = 0$ och då är

$$f(x,z) = x^2 + 2z.$$

I detta fall är

$$\mathbf{A} = (z^2 + 2xy + z)\,\hat{x} + (x^2 + 2yz + 2z)\,\hat{y} + (y^2 + 2xz + 2y + x)\,\hat{z}.$$

Med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ får vi systemet

$$\Phi'_x = z^2 + 2xy + z, \quad \Phi'_y = x^2 + 2yz + 2z, \quad \Phi'_z = y^2 + 2xz + 2y + x.$$

Ekvationen $\Phi'_x = z^2 + 2xy + z$ ger

$$\Phi = x^2y + xz + xz^2 + h(y,z).$$

Insättning av denna funktion i $\Phi'_y = x^2 + 2yz + 2z$ ger

$$h'_y(y,z) = 2yz + 2z$$

vilket ger $h(y,z) = y^2z + 2yz + k(z)$ och vi har då

$$\Phi = x^2y + xz + xz^2 + y^2z + 2yz + k(z).$$

Insättning i $\Phi'_z = y^2 + 2xz + 2y + x$ ger nu

$$k'(z) = 0$$

och vi får

$$\Phi = x^2y + xz + xz^2 + y^2z + 2yz + C$$

där C är en godtycklig konstant.

5.) Lösning 1: En standardräkning ger

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

i alla punkter där $x^2 + y^2 \neq 0$. Låt Γ_1 vara kurvan $x^2 + y^2 = 1,\ z = 4$. Kurvan $\Gamma + \Gamma_1$ utgör randen till en yta S med $S : x^2 + y^2 \geq 1,\ 2x^2 + 3y^2 \leq 4,\ z = 4$. Enligt Stokes Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

och av detta följer att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där Γ och Γ_1 genomlöps i samma positiva riktning (moturs: observera att S ska ligga till vänster om genomlöpningsriktningen för att Stokes' Sats ska gälla; här kan man välja moturs för Γ_1 vilket innebär att Γ genomlöps medurs). På Γ_1 är $\rho = 1$,. Vi parametriserar Γ_1 genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} + 4\hat{z}$ med $0 \le \phi \le 2\pi$. Obervera att $\mathbf{r}'(\phi) = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$ och att på Γ_1 är $\mathbf{A} = (\cos^2\phi - \sin^2\phi)\,\hat{x} + 2\cos\phi\sin\phi\,\hat{y}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi) d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} [(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\,\hat{x} + 2\cos\phi\sin\phi\,\hat{y}] \cdot [-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}] d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} [-\sin\phi(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2\sin\phi\cos^2\phi]\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\phi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Således har vi

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Lösning 2: Med $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi$ kan man skriva $\mathbf{A}$ som

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\rho^2}[\cos\phi\,\hat{\rho} + \sin\phi\,\hat{\phi}]$$

och man erhåller (med definitionen av $\nabla \times \mathbf{A}$ i cylinderkoordinater)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\,\hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \partial_\phi & \partial_z \\ \dfrac{\cos\phi}{\rho^2} & \dfrac{\sin\phi}{\rho} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

i alla punkter där $\rho \neq 0$. Ersätt som ovan kurvan Γ med kurvan $\Gamma_1 : \rho = 1, z = 4$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho} + 4\hat{z}$. Med hjälp av Stokes' Sats har vi (som ovan)

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}\\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi\\
&= \int_0^{2\pi} [\cos\phi\,\hat{\rho} + \sin\phi\,\hat{\phi}]\cdot\hat{\phi}\, d\phi\\
&= \int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\phi\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

6.) Lösning 1: Vektorfältet kan skrivas som

$$\mathbf{A} = \hat{\rho} - \frac{z}{\rho}\,\hat{z}$$

i cylinderkoordinater (ρ,ϕ,z). Ytan ges nu genom ekvationen $S: z = 4-\rho^2,\ 2\le\rho\le 4$ och vi parametriserar S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\,\hat{\rho} + (4-\rho^2)\hat{z},\ (\rho,\phi)\in D$ där $D: \sqrt{2}\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Vi har $\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho}-2\rho\hat{z})\times(\rho\,\hat{\phi}) = 2\rho^2\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$. Observera att vilkoret $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} > 0$ ska uppfyllas. Vi har

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi}{|\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi|}$$

och kravet $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} > 0$ medför att vi måste ha

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi}{|\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi|}$$

eftersom $\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi = 2\rho^2\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$ har positiv z-komponent. Det sökta flödet är då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot\left(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi\right)\, d\rho d\phi\\
&= \iint_D \left(\hat{\rho} - \frac{(4-\rho^2)}{\rho}\,\hat{z}\right)\cdot\left(2\rho^2\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}\right)\, d\rho d\phi\\
&= \iint_D (3\rho^2-4) d\rho d\phi\\
&= 4\pi\int_{\sqrt{2}}^2 (3\rho^2-4)d\rho\\
&= 4\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}
$$

Lösning 2: Vi har, med

$$\mathbf{A} = \hat{\rho} - \frac{z}{\rho}\,\hat{z}$$

i cylinderkoordinater (ρ,ϕ,z), att

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(-z)\right] = 0$$

i alla punkter där $\rho \neq 0$. Låt S vara ytan $S : z = 4 - \rho^2$ och $S_1 : \sqrt{2} \leq \rho \leq 2,\ z = 0$ samt $C : \rho = \sqrt{2},\ 0 \leq z \leq 2$. Om V betecknar den kropp som ytan $S + S_1 + C$ omsluter, då har vi enligt Gauss' Sats att

$$\iint_{S+S_1+C} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = 0$$

där alla normaler pekar ut från V och därmed är flödet ut genom S i riktning $\hat{\mathbf{n}}$ med $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{z} > 0$. Observera att $\mathbf{A}$ är C^1 på V och i någon omgivning av V och att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ på V. Således är det sökta flödet

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = -\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1\, dS - \iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C\, dC$$

På S_1 är $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{z}$ och $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = -z/\rho = 0$ ty $z = 0$ på S_1. Således har vi att det sökta flödet är

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C\, dC$$

där $\hat{\mathbf{n}}_C$ pekar nu in mot V och bort från $z-$axeln. Vi parametriserar C genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi, z) = \sqrt{2}\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$ med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 2$. Vi har $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \sqrt{2}\,\hat{\phi} \times \hat{z} = \sqrt{2}\,\hat{\rho}$. Vi har då

$$\begin{aligned}
\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C\, dC &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot \left(\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z\right)\, d\phi\, dz \\
&= \iint_D \left(\hat{\rho} - \frac{z}{\sqrt{2}}\,\hat{z}\right) \cdot (\sqrt{2}\,\hat{\rho})\, d\phi\, dz \\
&= \iint_D \sqrt{2}\, d\phi\, dz \\
&= 4\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

Anmärkning: Det är ett **principfel** att tillämpa Gauss' sats på hela området $0 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2),\ 0 \leq z \leq 2$ eftersom $\mathbf{A}$ är **singulärt** där, och då **gäller inte** Gauss' sats.