**TATA44 Lösningar 28/10/2016.**

**1.) Lösning 1:** Planet $z = 1$ skär sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ då $x^2 + y^2 = 3$. Inför sfäriska koordinater: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$. På sfären är $r = 2$ och $z = 1$ och med $z = r\cos\theta$ får vi att $2\cos\theta = 1$ som i sin tur ger $\cos\theta = 1/2$, av vilket det följer att $\theta = \pi/3$ ty $0 \le \theta \le \pi$. Sätt $D : 0 \le \theta \le \pi/3,\ 0 \le \phi \le 2\pi$.

Parametrisera ytan $S$ genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta,\phi) = 2\,\hat{\mathbf{r}}$, $\quad (\theta,\phi) \in D$. Vi har $\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = 2\hat{\theta} \times (2\sin\theta\,\hat{\phi}) = 4\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}$ och areamåttet är $dS = \left|\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right|\, d\theta\, d\phi$. Vidare är $x^2 + y^2 = 4\sin^2\theta$.

Den sökta integralen är då

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (x^2+y^2)\, dS \\ &= \iint_D 4\sin^2\theta\, \left|\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right|\, d\theta\, d\phi \\ &= 16 \iint_D \sin^3\theta\, d\theta\, d\phi \\ &= 32\pi \int_0^{\pi/3} \sin^3\theta\, d\theta \\ &= \frac{20\pi}{3}. \end{aligned}$$

**Lösning 2:** I cylinderkoordinater är sfären $\rho^2 + z^2 = 4$ och vår yta är $S : \rho^2 + z^2 = 4,\ 1 \le z \le 2$. Planet skär sfären i $z = 1$ och då är $\rho = \sqrt{3}$. Parametrisera ytan genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\,\hat{\rho} + \sqrt{4-\rho^2}$ med $(\rho,\phi) \in D$ där $D : \rho \le \sqrt{3},\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Observera att $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = \left[\hat{\rho} - \frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\hat{z}\right] \times (\rho\,\hat{\phi}) = \frac{\rho^2}{\sqrt{4-\rho^2}}\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$. Areamåttet är $dS = \left|\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi\right|\, d\rho d\phi = \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}$. Integralen är nu

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2+y^2)\, dS &= \iint_D \rho^2 \left|\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi\right|\, d\rho d\phi \\ &= 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{\sqrt{4-\rho^2}}\, d\phi\right) d\rho \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\rho^3}{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho \\ &= [u = 4-\rho^2] \\ &= -2\pi \int_4^1 \frac{4-u}{\sqrt{u}}\, du \\ &= 2\pi \int_1^4 [4u^{-1/2} - u^{1/2}]\, du \\ &= \frac{20\pi}{3}. \end{aligned}$$

**2.) Lösning 1:** Ytorna $z = x^2+y^2$ och $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$ skär varandra då $x^2+y^2 = 2-\sqrt{x^2+y^2}$ vilket ger, med $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\rho^2+\rho-2 = 0$. Då är $(\rho+2)(\rho-1) = 0$ vilket ger $\rho = 1$ ty $\rho \ge 0$:

ytorna skär varandra då $z = 1$ och då är ytan $S : z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1$. Vi parametriserar $S$ genom ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (x^2 + y^2)\,\hat{z}$ med $(x, y) \in D$ där $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Observera att vi har då

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (\hat{x} + 2x\,\hat{z}) \times (\hat{y} + 2y\,\hat{z}) = -2x\,\hat{x} - 2y\,\hat{y} + \hat{z}.$$

Det sökta flödet är då

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y)\,dx\,dy \\
&= \iint_D \left(xy^2\,\hat{x} + yx^2\,\hat{y} + (x^2 + y^2)^3\,\hat{z}\right) \cdot (-2x\,\hat{x} - 2y\,\hat{y} + \hat{z})\ dx\,dy \\
&= \iint_D \left[(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2\right]\ dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} [\rho^6 - 4\rho^4\cos^2\phi\sin^2\phi]\rho\,d\phi\right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[\rho^7 - \rho^5\sin^2 2\phi\right]\ d\phi\right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[\rho^7 - \frac{\rho^5(1 - \cos 4\phi)}{2}\right]\ d\phi\right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[\rho^7 - \frac{\rho^5}{2}\right]\ d\rho \\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

**Lösning 2:** En variant av Lösning 1 är att sätta in cylinderkoordinater från början: ytan $z = x^2 + y^2$ med $0 \leq z \leq 1$ ges nu av $z = \rho^2,\ \rho \leq 1$. Ortsvektorn för denna yta är $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + \rho^2\,\hat{z}$ med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. På ytan har vi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) = \rho^3\cos\phi\sin^2\phi\,\hat{x} + \rho^3\sin\phi\cos^2\phi\,\hat{y} + \rho^6\,\hat{z}.$$

Observera att $\hat{\rho} \cdot \hat{x} = \cos\phi,\ \hat{\rho} \cdot \hat{z} = 0$. Vi har även $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = -2\rho^2\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$. Då har vi att det sökta flödet är

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)\,d\rho\,d\phi \\
&= \iint_D [\rho^7 - 4\rho^5\cos^2\phi\sin^2\phi]\,d\rho\,d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} [\rho^7 - \rho^5\ \sin^2 2\phi]\,d\phi\right)d\rho \\
&= \int_0^1 \left( {}_{0}^{2\pi} \left[\rho^7 - \frac{\rho^5}{2}(1-\cos 2\phi)\right]\,d\phi\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_0^1 \left[\rho^7 - \frac{\rho^5}{2}\right]\,d\rho \\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

**Lösning 3:** Som ovan: ytorna skär varandra då $z = 1$. Observera att $\nabla\cdot\mathbf{A} = x^2 + y^2 + 3z^2$ och att $\mathbf{A}$ är $C^1$ överallt. Sätt $S : z = x^2 + y^2$ och $S_1 : z = 1,\ x^2 + y^2 \le 1$. Vidare låt $V$ beteckna den kropp som avgränsas av ytorna $S, S_1$. Då definieras $V$ genom olikheterna $x^2 + y^2 \le z \le 1,\ x^2 + y^2 \le 1$. Enligt Gauss' Sats har vi

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV$$

där enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ pekar ut ur $V$. Då har vi

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV - \iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1.$$

För $S_1$ är $\hat{n}_1 = \hat{z}$ och vi får

$$\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 dS_1 = \iint_D dxdy = \pi$$

eftersom $z = 1$ på $S_1$ och $S_1$ är enhetscirkelskivan. Således är

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}dV - \pi.$$

Vi har nu

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV &= \iiint_V dxdydz \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} \left( \int_{x^2+y^2}^{1} (x^2+y^2+3z^2)dz \right) dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} \left[ (x^2+y^2)z + z^3 \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1} dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1} \left[ x^2+y^2-(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)^3+1 \right] dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ \ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi] \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} (\rho^2+1-\rho^4-\rho^6)\rho\, d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 (\rho+\rho^3-\rho^5-\rho^7)dr \\
&= \frac{11\pi}{12}
\end{aligned}
$$

och vi får

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = -\frac{\pi}{12}.$$

I denna kalkyl pekar alla normaler ut ur $V$. Vi ska ha flödet i den riktning som bestäms av $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} > 0$, med man har $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} < 0$ med Gauss' Sats. Således är det sökta flödet

$$\Phi = -\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \frac{\pi}{12}.$$

**Lösning 4:** Som ovan, ytorna skär varandra då $x^2+y^2 = 2-\sqrt{x^2+y^2}$ vilket ger $z=1$. Sätt $S: z = x^2+y^2,\ 0\le z\le 1$. Lägg till följande ytor: cylindern $C: x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1$ och cirkelskivan $L: x^2+y^2\le 1,\ z=0$. Ytorna $S+C+L$ omslutar en kropp $V: 0\le z\le x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 1$. Enligt Gauss' Sats gäller att

$$\iint_{S+C+L} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dV$$

och alla normaler pekar ut ur kroppen $V$, vilket betyder att normalen till $S$ uppfyller kravet $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{z} > 0$. Det sökta flödet är då

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dV - \iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\, dC - \iint_L \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_L\, dL.$$

På $L$ är $z=0$ och $\hat{\mathbf{n}}_L = -\hat{z}$ vilket ger att $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_L = -z^3 = 0$.

Cylindern $C$ parametriseras genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi,z) = \hat{\rho} + z\,\hat{z}$ med $(\phi,z)\in D$ där $D: 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le z\le 1$. Vi har $\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z = \hat{\phi}\times\hat{z} = \hat{\rho}$ och på $C$ är $\mathbf{A} = \cos\phi\sin^2\phi\,\hat{x} + \sin\phi\cos^2\phi\,\hat{y} + z^3\,\hat{z}$ i cylinderkoordinater. Observera att $\hat{\rho}\cdot\hat{x} = \cos\phi,\ \hat{\rho}\cdot\hat{y} = \sin\phi$. Vi har då (efter lite arbete)

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z) = 2\cos^2\phi\sin^2\phi$$

på $C$. Då är

$$
\begin{aligned}
\iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\,dC &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)\,d\phi dz\\
&= 2\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\sin^2\phi\,d\phi\right)dz\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\sin^2 2\phi\,d\phi\right)dz\\
&= \frac{1}{4}\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}[1-\cos 4\phi]\,d\phi\right)dz\\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Vidare är

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV &= \iiint_V (x^2+y^2+3z^2)dxdydz\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2+3z^2)dz\right)dxdy\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 1}\left[(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)^3\right]dxdy\\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\cos\phi\ \ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi]\\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}[\rho^4+\rho^6]\rho\,d\phi\right)d\rho\\
&= 2\pi\int_0^1[\rho^5+\rho^7]\,d\rho\\
&= \frac{7\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

Av detta följer att det sökta flödet är

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV - \iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C\,dC\\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}
$$

**3.) Lösning 1:** Ytorna skär varandra då $z=x^2+y^2=2-\sqrt{x^2+y^2}$ som, med $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, ger ekvationen $\rho^2+\rho-2=(\rho+2)(\rho-1)=0$. Då är $\rho=1$ och således är $z=1$. Detta ger att kurvan $\Gamma$ är kurvan $x^2+y^2=1,\ z=1$. Parametrisera $\Gamma$ genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi)=\cos\phi\,\hat{x}+\sin\phi\,\hat{y}+\hat{z}$. På $\Gamma$ är

$$
\mathbf{A}=-\sin^3\phi\,\hat{x}+\cos^3\phi\,\hat{y}+\cos\phi\sin\phi\,\hat{z}.
$$

Vi får nu

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot\, d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot\mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin^3\phi \\ \cos^3\phi \\ \cos\phi\sin\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} [\cos^4\phi + \sin^4\phi]\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} [(\cos^2\phi+\sin^2\phi)^2 - 2\sin^2\phi\cos^2\phi]\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{\sin^2 2\phi}{2}\right] d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{(1-\cos 4\phi)}{4}\right] d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4} + \frac{\cos 4\phi}{4}\right] d\phi \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

**Lösning 2:** En standardräkning ger att $\nabla\times\mathbf{A} = x\hat{x} - y\,\hat{y} + 3(x^2+y^2)\,\hat{z}$. Kurvan $\Gamma$ är randen till ytan $S: 2x+2y+z=1,\ z\geq x^2+y^2$. Som ovan, ytorna $z=x^2+y^2$ och $x^2+y^2+z^2=2$ skär varandra då $z=1$ vilket ger $z^2+z-2=(z+2)(z-1)=0$. Vi erhåller $z=1$ eftersom kurvan ligger även på $z=x^2+y^2\geq 0$. Låt $S$ vara ytan $x^2+y^2\leq 1,\ z=1$ och $D:(x,y): x^2+y^2\leq 1$. Parametrisera $S$ med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + \hat{z}$ med $(x,y)\in D$. En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y = \hat{z}$. Enligt Stokes' Sats har vi nu att

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \\
&= \iint_D (\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(x,y))\cdot\left(\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y\right) dxdy \\
&= \iint_D (x\hat{x} - y\,\hat{y} + 3(x^2+y^2)\,\hat{z})\cdot\hat{z}\, dxdy \\
&= 3\iint_D (x^2+y^2)\, dxdy \\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi] \\
&= 3\iint_E \rho^3\, d\phi\, d\rho \quad \text{där området } E \text{ definieras som } \ E:\rho\leq 1,\ 0\leq\phi\leq 2\pi \\
&= 3\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3\, d\phi\right) d\rho \\
&= 6\pi\int_0^1 \rho^3\, d\rho \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

**Lösning 3:** Som i den första lösningen får man att ytorna skär varandra då $z = 1$. Kurvan $\Gamma$ är randen till den del av sfären $x^2+y^2+z^2 = 2$ för vilken $z \leq 1$. Sätt $S : x^2+y^2+z^2 = 2,\ 1 \leq z \leq \sqrt{2}$. Parametrisera $S$ med ortsvektorn (i sfäriska koordinater) $\mathbf{r}(\theta, \phi) = \sqrt{2}\hat{\mathbf{r}}$ med $(\theta, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Gränserna för $\theta$ fås så här: då $z = 1$ är $z = \sqrt{2}\cos\theta = 1$ i sfäriska koordinater, vilket ger $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$. Eftersom $0 \leq \theta \leq \pi$ så måste $\theta = \pi/4$ för $z = 1$. En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi = 2\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}$. Vi får , som ovan, att

$$\nabla \times \mathbf{A} = x\,\hat{x} - y\,\hat{y} + 3(x^2+y^2)\,\hat{z}.$$

Observera att

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{x} = \sin\theta\cos\phi, \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{y} = \sin\theta\sin\phi, \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{z} = \cos\theta$$

vilket ger att på $S$ är (efter lite arbete)

$$(\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi))) \cdot (\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi) = 2\sqrt{2}\sin^3\theta\cos 2\phi + 12\sin^3\theta\cos\theta.$$

Enligt Stokes' Sats har vi nu att

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= \iint_D (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi)\,d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi/4} \left( \int_0^{2\pi} [2\sqrt{2}\sin^3\theta\cos 2\phi + 12\sin^3\theta\cos\theta]\,d\phi \right) d\theta \\
&= 24\pi \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= 6\pi \left[\sin^4\theta\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

**Lösning 4:** Man kan även uppfatta $\Gamma$ som gränsen till ytan $S : z = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 1$. I detta fallet parametriseras $S$ genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho, \phi) = \rho\,\hat{\rho} + \rho^2\,\hat{z}$ i cylinderkoordinater med $(\rho, \phi) \in D$ där $D : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Vi har då $\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi = (\hat{\rho} + 2\rho\,\hat{z}) \times (\rho\,\hat{\phi}) = -2\rho^2\,\hat{\rho} + \rho\,\hat{z}$. Denna vektor har positiv $z$-komponent. Observera att

$$\hat{\rho} \cdot \hat{x} = \cos\phi, \quad \hat{\rho} \cdot \hat{y} = \sin\phi, \quad \hat{\rho} \cdot \hat{z} = 0.$$

Vi erhåller som ovan $\nabla \times \mathbf{A} = x\,\hat{x} - y\,\hat{y} + 3(x^2+y^2)\,\hat{z} = \rho(\cos\phi\,\hat{x} - \sin\phi\,\hat{y}) + 3\rho^2\,\hat{z}$ och på $S$ har vi (efter lite arbete)

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho, \phi)) \cdot (\mathbf{r}'_\rho \times \mathbf{r}'_\phi) = \rho^3\,[3 - 2\cos 2\phi].$$

Enligt Stokes' Sats har vi då

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= \iint_D (\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi)\,d\theta d\phi \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\rho^3\,[3-2\cos 2\phi]\,d\phi\right)d\rho \\
&= 6\pi\int_0^1 \rho^3\,d\rho \\
&= \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

**4.) Lösning 1:** Ingen riktning anges och då ska man välja själv vilken riktning kurvan ska ha. Kurvan har två ändpunkter och då ska man själv välja vilken är startpunkten och då blir den andra punkten slutpunkten. $\mathbf{A}$ är ett potentialfält: ty med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion $\Phi(x,y,z)$ är

$$\Phi'_x = 2xy^2+6xz,\quad \Phi'_y = 2x^2y+2z^2,\quad \Phi'_z = 3x^2+4yz.$$

En standard räkning ger

$$\Phi(x,y,z) = x^2y^2+3x^2z+2yz^2+C$$

där $C$ är en godtycklig konstant.

Planet $y-z=0$ skär $x^2+2y^2+3z^2=10$ då $x^2+5y^2=10$. För $x=0$ är då $y=\pm\sqrt{2}$ och kurvan $\Gamma$ har ändpunkterna i $(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ och $(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$. Med $(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ som startpunkt och $(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$ som slutpunkt på $\Gamma$ har vi nu att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(0,\sqrt{2},\sqrt{2})-\Phi(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$$

**Lösning 2:** Man kan parametrisera kurvan så här: insättning av $y-z=0$ i $x^2+2y^2+3z^2=10$ ger $x^2+5y^2=10$. Då sätter man $x=\sqrt{10}\cos\phi,\ y=\sqrt{2}\sin\phi,\ z=\sqrt{2}\sin\phi$. Eftersom $x\geq 0$ så måste $\cos\phi\geq 0$ vilket ger att $-\pi\leq\phi\leq\pi/2$. Välj $\phi: -\pi/2\to\pi/2$ (för att välja en riktning). Vi får då

$$\mathbf{r}(\phi) = \sqrt{10}\cos\phi\,\hat{x}+\sqrt{2}\sin\phi\,\hat{y}+\sqrt{2}\sin\phi\,\hat{z}.$$

Vi har då (efter lite algebra)

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot\mathbf{r}'(\phi)\ d\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}[8\sqrt{2}\cos\phi+22\sqrt{2}\cos^3\phi+40\cos^3\phi\sin\phi-56\sqrt{2}\cos\phi\sin^2\phi-40\cos\phi\sin^3\phi]\,d\phi \\
&= 8\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

**Lösning 3:** En enkel räkning visar att $\nabla\times\mathbf{A}=0$ och eftersom $\mathbf{A}$ är kontinuerligt deriverbart överallt, så är kurvintegralen oberoende av vägen. Planet $y-z=0$ skär $x^2+2y^2+3z^2=10$

då $x^2 + 5y^2 = 10$. För $x = 0$ har vi då att $y = \pm\sqrt{2}$. Kurvans start- och slutpunkterna är alltså $(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ och $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$. Låt $(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ vara startpunkten. Låt $\Gamma_1$ vara den räta linje som börjar i $(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ och slutar i $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$. Vi parametrisera $\Gamma_1$ genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ t \end{bmatrix}, \quad t : -\sqrt{2} \to \sqrt{2}.$$

Eftersom kurvintegraler för $\mathbf{A}$ är oberoende av vägen så har vi

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0, 2t^2 \\ 4t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\
&= 6 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} t^2\, dt \\
&= 12 \int_0^{\sqrt{2}} t^2\, dt \\
&= 8\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

**5.) Lösning 1:** I denna uppgift angavs inte hur man ska förstå moturs–uppifrån eller nerifrån planet. Här väljer jag moturs sett uppifrånt.ex. sett från punkten $(0, 0, 17)$. Svaret En standardräkning ger

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

i alla punkter där $x^2 + y^2 \neq 0$. Låt $\Gamma_1$ vara kurvan $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$. Kurvan $\Gamma + \Gamma_1$ utgör randen till en yta $S$ (ett ben på en leggings) på vilken $\mathbf{A}$ är $C^1$ och $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Enligt Stokes' Sats har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

och av detta följer att

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där $\Gamma$ och $\Gamma_1$ genomlöps i samma positiva riktning (moturs: observera att $S$ ska ligga till vänster om genomlöpningsriktningen för att Stokes' Sats ska gälla; här kan man välja moturs för $\Gamma_1$ vilket innebär att $\Gamma$ genomlöps medurs). Vi parametriserar $\Gamma_1$ genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\phi) = \cos\phi\, \hat{x} + \sin\phi\, \hat{y}$$

med $\phi : 0 \to 2\pi$. Vi får nu

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \sin^3 \\ -\cos\phi\sin^2\phi \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix} d\phi \\
&= -\int_0^{2\pi} (\sin^4\phi + \cos^2\sin^2\phi)]d\phi \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\phi}{2}\, d\phi \\
&= -\pi.
\end{aligned}
$$

Skulle man välja moturs sett nerifrån t.ex från punkten $(0, 0, -17)$ ska man få svaret $\pi$.

**Lösning 2:** Vektorfältet kan skrivas som

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= -\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\,[-y\,\hat{x} + x\,\hat{y}] + z\,\hat{z} \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ z = z] \\
&= -\frac{\sin^2\phi}{\rho}\,[-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}] + z\,\hat{z} \\
&= -\frac{\sin^2\phi}{\rho}\,\hat{\phi} + z\,\hat{z}.
\end{aligned}
$$

Man får $\nabla\times\mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $\rho \neq 0$ som ovan. Sedan väljer man $S$ och $\Gamma_1$ som ovan med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \hat{\rho}$ och vi får (med det val av orientering som gjordes ovan)

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi))\cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= -\int_0^{2\pi} (\sin^2\phi)\,\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\, d\phi \\
&= -\pi.
\end{aligned}
$$

**6.)** Ortsvektorn för punkter på $S$ är (i sfäriska koordinater)

$$
\mathbf{r}(\theta,\phi) = \frac{1}{2-\cos\theta}\hat{\mathbf{r}}
$$

med $(\theta,\phi)\in D$ där $D: 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Vi har

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi &= \left(-\frac{\sin\theta}{(2-\cos\theta)^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{2-\cos\theta}\hat{\theta}\right) \times \left(\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}\hat{\phi}\right) \\
&= \frac{\sin\theta}{(2-\cos\theta)^2}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin^2\theta}{(2-\cos\theta)^3}\hat{\theta}
\end{aligned}
$$

som har positiv $\hat{\mathbf{r}}$-komponent, och således pekar bort från origo. På $S$ har vi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) = (2 - \cos\theta)^2 \hat{\mathbf{r}} + \frac{(2 - \cos\theta)}{\sin\theta} \hat{\theta}.$$

Det sökta flödet är nu

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot \left(\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right) \, d\rho d\phi \\
&= \iint_D \left[\sin\theta + \frac{\sin\theta}{(2 - \cos\theta)^2}\right] \, d\theta d\phi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \left[\sin\theta + \frac{\sin\theta}{(2 - \cos\theta)^2}\right] \, d\theta \\
&= 2\pi \left[-\cos\theta - \frac{1}{2 - \cos\theta}\right]_0^{\pi/2} \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

Observera att $\mathbf{A}$ har singulariteter på hela $z$-axeln, där $\theta = 0$, så borde man egentligen betrakta flödesintegralen som en generaliserad integral. Men skalärprodukten $\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot \left(\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right)$ är faktiskt en funktion som är definierad överallt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot \left(\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi\right) = \sin\theta + \frac{\sin\theta}{(2 - \cos\theta)^2}$$

och då försvinner singulariteten i $\mathbf{A}$—singulariteten kallas **hävbar** i sådana fall och det är därför jag inte har definierat ytintegralen som en generaliserad integral.