LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.
2016-10-28, kl 8.00–12.00

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.
Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.
Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

---

1. Beräkna ytintegralen $\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$ där S är den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ovanför planet $z = 1$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = xy^2\hat{x} + yx^2\hat{y} + z^3\hat{z}$ ut genom ytan S som är den del av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ som är innanför konen $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Riktningen bestäms av villkoret $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{z} > 0$. Motivera noga.

3. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = -y^3\,\hat{x} + x^3\,\hat{y} + xy\,\hat{z}$$

och Γ är skärningskurvan mellan sfären $x^2+y^2+z^2 = 2$ och paraboloiden $z = x^2+y^2$. Orientering är moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$.

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (2xy^2 + 6xz)\,\hat{x} + (2x^2y + 2z^2)\,\hat{y} + (3x^2 + 4yz)\,\hat{z}$$

och Γ är skärningskurvan mellan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 10$ och planet $y - z = 0$ med $x \geq 0$.

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}\hat{x} - \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}\hat{y} + z\,\hat{z}$$

och Γ är skärningskurvan mellan cylindern $2x^2 + 3y^2 = 9$ och planet $x + y + z = 17$. Kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\hat{\theta}$$

genom ytan S som ges av ekvationen $r = \dfrac{1}{2 - \cos\theta}$ med $0 < \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ (riktning: bort från origo).