TATA44 Lösningar 21/10/2019.

1.) Ytorna skär varandra då $x^2 + y^2 = 1$. Vi parametriserar ytan S med ortsvektorn $\mathbf{r}(x,y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (x^2 + 2y^2)\,\hat{z}$ där $(x,y) \in D$ med $D : x^2 + y^2 \leq 1$. En enkel räkning ger $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = -2x\,\hat{x} - 4y\,\hat{y} + \hat{z}$ som ger $|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| = \sqrt{1 + 4x^2 + 16y^2}$.

Vi har då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \sqrt{1+4x^2+16y^2}\,dS &= \iint_D (1 + 4x^2 + 16y^2)\,dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} [1 + 10\rho^2 - 6\rho^2 \cos 2\phi]\rho\,d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 [\rho + 10\rho^3]\,d\rho \\
&= 6\pi.
\end{aligned}
$$

2.) En standardräkning ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2(x+y+z)$ eller . Låt S vara ytan $z = 2-(x^2+y^2),\ \ z \geq 0$. Sätt $S_1 : x^2 + y^2 \leq 2,\ z = 0$. Låt V beteckna volymen som omslutes av $S + S_1$. Enligt Gauss' Sats har vi nu

$$
\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\,dV
$$

av vilket vi har

$$
\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\,dV - \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dS_1.
$$

Observera att $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{z}$ på S_1 och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -(x^2 + y^2)$ på S_1. Volymen V definieras genom olikheterna $0 \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2),\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2$. Då har vi

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\,dS_1 &= -\iint_{x^2+y^2\leq 2} (x^2 + y^2)\,dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi] \\
&= -\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \rho^3\,d\phi \right) d\rho \\
&= -2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3\,d\rho \\
&= -2\pi.
\end{aligned}
$$

Vidare har vi

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV &= 2\iint_{x^2+y^2\le 2}\left(\int_0^{2-(x^2+y^2)}(x+y+z)\,dz\right)dxdy\\
&= 2\iint_{x^2+y^2\le 2}\left[(x+y)(2-x^2-y^2)+\frac{(2-x^2-y^2)^2}{2}\right]dxdy\\
&= [x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ 0\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi]\\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left[\rho(2-\rho^2)(\cos\phi+\sin\phi)+\frac{(2-\rho^2)^2}{2}\right]\rho\,d\phi\right)d\rho\\
&= 4\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{(2-\rho^2)^2}{2}\rho\,d\rho\\
&= [u=2-\rho^2]\\
&= -\pi\int_2^0 u^2\,du\\
&= \pi\int_0^2 u^2\,du\\
&= \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Det sökta flödet är då

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS &= \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,dV - \iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS_1\\
&= \frac{14\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

3.) Lösning 1: En standardräkning ger

$$\nabla\times\mathbf{A}=0.$$

Eftersom $\mathbf{A}$ är av klass C^1 överallt, då finns det en potential Φ med $\mathbf{A}=\nabla\Phi$ överallt. Vi har då

$$\Phi'_x = 1+y^2,\quad \Phi'_y = 2xy+z^2,\quad \Phi'_z = 2yz.$$

den första ekvationen ger

$$\Phi = x+xy^2+g(y,z).$$

Insättning av detta i den andra ekvationen ger

$$g'_y(y,z)=z^2$$

vilket ger $g(y,z)=yz^2+h(z)$ och då är

$$\Phi = x+xy^2+yz^2+h(z).$$

Insättning av detta uttryck i den tredje ekvationen ger $h'(z)=0$ och då har vi

$$\Phi(x, y, z) = x + xy^2 + yz^2 + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Planet och paraboloiden skär varandra då

$$2 - 2x - 2y = 4 - x^2 - y^2,$$

som ger

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

När $x = 1$ då är $y - 1 = \pm 2$, d.v.s. $y = -1$ eller $y = 3$. Kurvans startpunkt är då $(1, -1, 1)$ och slutpunkten är $(1, 3, -3)$. Vi har då

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d(r) &= \Phi(1, 3, -3) - \Phi(1, -1, 1) \\ &= 37 - 1 \\ &= 36.\end{aligned}$$

Lösning 2: Som ovan erhåller vi $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ vilket betyder att $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen. Kurvan har (som noterats ovan) startpunkt $(1, -1, 1)$ och slutpunkt $1, 3, -3)$. Låt Γ_1 vara den sträcka (=räta linje) som börjar i $(1, -1, 1)$ och slutar i $(1, 3, -3)$. Då kan vi parametrisera Γ_1 med ortsvektorn

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad t : 0 \to 1$$

eftersom sträckan har riktningsvektorn

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Vi har

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) = \begin{bmatrix} 16t^2 - 8t + 2 \\ 16t^2 - 1 \\ -32t^2 + 16t - 2 \end{bmatrix}$$

och då är

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^1 \mathbf{A}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \begin{bmatrix} 16t^2-8t+2 \\ 16t^2-1 \\ -32t^2+16t-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} dt \\
&= \int_0^1 [192t^2-64t+4]\,dt \\
&= 36.
\end{aligned}
$$

4. $\mathbf{A}$ är ett potentialfält om $\nabla\times\mathbf{A}=0$. En standardräkning (i sfäriska koordinater) med kravet $\nabla\times\mathbf{A}=0$ ger $f'(r)=\dfrac{1}{2r}f(r)$ vilket ger $f(r)=C\sqrt{r}$ där C är en godtycklig konstant ($C\neq 0$ för ett icke-trivialt vektorfält). I detta fall har vi $\mathbf{A}=\nabla\Phi$ där $\Phi(r,\theta,\phi)$ är en lösning till systemet

$$
\begin{aligned}
\Phi'_r &= \frac{3C}{2}r^{1/2}\sin^2\theta\sin\phi \\
\Phi'_\theta &= 2Cr^{3/2}\sin\theta\cos\theta\sin\phi \\
\Phi'_\phi &= Cr^{3/2}\sin^2\theta\cos\phi.
\end{aligned}
$$

Den första ekvationen ger

$$\Phi = Cr^{3/2}\sin^2\theta\sin\phi + g(\theta,\phi).$$

Insättning i den andra ekvationen ger $g'_\theta=0$ och då är $g(\theta,\phi)=h(\phi)$. Således är

$$\Phi = Cr^{3/2}\sin^2\theta\sin\phi + h(\phi).$$

Insättning av detta uttryck i den tredje ekvationen ger $h'(\phi)=0$, vilket ger

$$\Phi = Cr^{3/2}\sin^2\theta\sin\phi + D$$

där $C\neq 0,\ D$ är godtyckliga konstanter.

5.) Vi har $\mathbf{A}=\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2$ med

$$\mathbf{A}_1 = 2xz\,\hat{x} + z\,\hat{y} + (x^2+y)\,\hat{z}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{y}{x^2+y^2}\,\hat{x} - \frac{x}{x^2+y^2}\,\hat{y}.$$

Vidare har vi $\nabla\times\mathbf{A}_1=0$ i alla punkter och $\nabla\times\mathbf{A}_2=0$ i alla punkter där $x^2+y^2\neq 0$. Då är $\mathbf{A}_1$ ett potentialfält i hela $\mathbb{R}^3$. Kurvan Γ är sluten, vilket medför att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_1\cdot\, d\mathbf{r} = 0$$

och således har vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot\, d\mathbf{r} = \int_\Gamma \mathbf{A}_2\cdot\, d\mathbf{r}.$$

Låt Γ_1 vara kurvan $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ och S vara den yta vars rand är $\Gamma + \Gamma_1$. Då har vi

$$\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0$$

av vilket det förljer att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}$$

där båda kurvorna genomlöps moturs sett från $(0, 0, 17)$. Parametrisera Γ_1 med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$ med $\phi : 0 \to 2\pi$. Då är

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}(\phi)) \cdot \mathbf{r}'(\phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin\phi\,\hat{x} - \cos\phi\,\hat{y}) \cdot (-\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})\, d\phi \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Således har vi att

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -2\pi.$$

6.) Lösning 1: Ytan S kan skrivas som $\rho^2 + (z-1)^2 = 1$ i cylinderkoordinater, vilket ger $\rho = \sqrt{2z - z^2}$. Parametrisera ytan S med ortsvektorn (i cylinderkoordinater) $\mathbf{r}(\phi, z) = \sqrt{2z - z^2}\hat{\rho} + z\,\hat{z}$ med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2$. I cylinderkoordinater är

$$\mathbf{A} = \hat{\rho} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\hat{z}.$$

Observera att vi får (efter en standardräkning) $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z = \sqrt{2z - z^2}\hat{\rho} + (z-1)\,\hat{z}$. Vektorfältet har singulariteter på z-axeln. Då definierar vi ytan S_ϵ genom $S_\epsilon : 0 < \epsilon \le z \le 2 - \epsilon,\ 0 \le \phi \le 2\pi$ och vi definierar det sökta flödet som

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \lim_{\epsilon \to 0_+} \iint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS_\epsilon.$$

Låt D_ϵ vara parameterområdet $0 < \epsilon \le z \le 2 - \epsilon,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. Vi har då

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\, dS_\epsilon &= \iint_{D_\epsilon} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)\, d\phi dz \\
&= \iint_{D_\epsilon} \left[\sqrt{2z-z^2}+\frac{z^2-z}{\sqrt{2z-z^2}}\right] d\phi dz \\
&= 2\pi\int_\epsilon^{2-\epsilon} \frac{z}{\sqrt{1-(z-1)^2}}\, dz \\
&= [t=z-1] \\
&= 2\pi\int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\
&= 2\pi\left[\arcsin t-\sqrt{1-t^2}\right]_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \\
&= 4\pi\arcsin(1-\epsilon).
\end{aligned}
$$

Av detta följer att det sökta flödet är

$$
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = 4\pi\lim_{\epsilon\to 0_+}\arcsin(1-\epsilon) = 2\pi^2.
$$

Lösning 2: I sfäriska koordinater är ortsvektorn för punkter på S

$$
\mathbf{r}(\theta,\phi) = \cos\phi\sin\theta\,\hat{x}+\sin\phi\sin\theta\,\hat{y}+(1+\cos\theta)\,\hat{z} = \hat{\mathbf{r}}+\hat{z}
$$

med $(\theta,\phi)\in D$ där $D: 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Vi har då

$$
\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi = \hat{\theta}\times(\sin\theta\,\hat{\phi}) = \sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}.
$$

Observera att $(x^2+y^2)^{1/2}=\sin\theta$ på ytan S och då har vi

$$
\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi)) = \frac{1}{\sin\theta}\,\hat{\mathbf{r}}
$$

på ytan S. $\mathbf{A}$ har en singularitet i $\theta=0$ och i $\theta=\pi$. Definiera då S_ϵ genom $S_\epsilon: r=\cos\theta,\ 0<\epsilon\le\theta\le\pi-\epsilon,\ 0\le\phi\le 2\pi$ och $D_\epsilon: 0<\epsilon\le\theta\le\pi-\epsilon,\ 0\le\phi\le 2\pi$ och vi definierar det sökta flödet som

$$
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \lim_{\epsilon\to 0_+}\iint_{S_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS_\epsilon.
$$

Vi har då

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS &= \iint_{D_\epsilon} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi)\, d\theta d\phi \\
&= \iint_{D_\epsilon}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\hat{\mathbf{r}}\right)\cdot(\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}\, d\theta d\phi \\
&= \int_\epsilon^{\pi-\epsilon}\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right) d\theta \\
&= 2\pi(\pi-2\epsilon)
\end{aligned}
$$

som ger

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \lim_{\epsilon\to 0_+}\iint_{S_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS_\epsilon$$
$$= 2\pi^2.$$

Lösning 3: Ekvationen $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ ger $x^2+y^2+z^2-2z=0$. Om vi i denna ekvation inför sfäriska koordinater då erhåller vi att ytan S ges av ekvationen

$$r = 2\cos\theta,$$

vilket medför att $0\le\theta\le\pi/2$ eftersom vi vet att $0\le\theta\le\pi$ i sfäriska koordinater och eftersom $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge 0$ då måste $\cos\theta\ge 0$, vilket leder till $0\le\theta\le\pi/2$. Då kan vi parametrisera S genom ortsvektorn (i sfäriska koordinater)

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = 2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}},\quad (\theta,\phi)\in D,$$

där $D: 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Vidare ges vektorfältet $\mathbf{A}$ av

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sin\theta}\,\hat{\mathbf{r}}.$$

Vi har även

$$\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi = (-2\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}} + 2\cos\theta\,\hat{\theta})\times(2\cos\theta\sin\theta\,\hat{\phi}) = 4\cos^2\theta\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}} + 4\cos\theta\sin^2\theta\,\hat{\theta}.$$

Vektorfältet $\mathbf{A}$ har en singularitet i $\theta=0$ och $\theta=\pi$. Då definierar vi S_ϵ genom $S_\epsilon: r=\cos\theta,\ 0<\epsilon\le\theta\le\pi/2-\epsilon,\ 0\le\phi\le 2\pi$ och $D_\epsilon: 0<\epsilon\le\theta\le\pi/2-\epsilon,\ 0\le\phi\le 2\pi$ och vi definierar det sökta flödet som

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \lim_{\epsilon\to 0_+}\iint_{S_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS_\epsilon.$$

Vi har nu

$$\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS_\epsilon &= \iint_{D_\epsilon}\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi)\,d\theta d\phi\\
&= \int_\epsilon^{\pi/2-\epsilon}\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\hat{\mathbf{r}}\right)\cdot\left(4\cos^2\theta\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}} + 4\cos\theta\sin^2\theta\,\hat{\theta}\right)\,d\phi\right)\,d\theta\\
&= 8\pi\int_\epsilon^{\pi/2-\epsilon}\cos^2\theta\,d\theta\\
&= \left[\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right]\\
&= 4\pi\int_\epsilon^{\pi/2-\epsilon}[1+\cos 2\theta]\,d\theta\\
&= 4\pi\left[\frac{\pi}{2} - 2\epsilon + \frac{\sin(\pi/2-\epsilon)-\sin\epsilon}{2}\right]
\end{aligned}$$

och av detta får vi det sökta flödet som

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \lim_{\epsilon\to 0_+}\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS_\epsilon$$
$$= 2\pi^2$$

Lösning 4: I cylinderkoordinater är $\mathbf{A} = \hat{\rho} + \frac{z}{\rho}\,\hat{z}$ och vi erhåller $\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{2}{\rho}$. Cylindern $x^2+y^2=\epsilon^2$ skär ytan S då $z = 1\pm\sqrt{1-\epsilon^2}$. Låt C_ϵ vara cylindern $C_\epsilon : x^2+y^2=\epsilon^2,\ 1-\sqrt{1-\epsilon^2}\le z\le 1+\sqrt{1-\epsilon^2}$ och låt V_ϵ vara volymen mellan $S_\epsilon : x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ 1-\sqrt{\epsilon^2}\le z\le 1+\sqrt{\epsilon^2}$ och C_ϵ. I cylinderkoordinater kan vi beskriva V_ϵ genom olikheterna

$$1-\sqrt{1-\rho^2}\le z\le 1+\sqrt{1-\rho^2},\quad \epsilon\le\rho\le 1,\quad 0\le\phi\le 2\pi.$$

Vektorfältet $\mathbf{A}$ är av klass C^1 i V_ϵ och i en omgivning av V_ϵ. Vi definierar då det sökta flödet som

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \lim_{\epsilon\to 0_+}\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\,dS_\epsilon.$$

Vi har då enligt Gauss' Sats att

$$\iint_{S_\epsilon+C_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\,dS_\epsilon = \iiint_{V_\epsilon}\nabla\cdot\mathbf{A}\,dxdydz,$$

vilket ger

$$\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\,dS_\epsilon = \iiint_{V_\epsilon}\nabla\cdot\mathbf{A}\,dxdydz - \iint_{C_\epsilon}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\,dC_\epsilon$$

där alla normaler pekar ut ur V_ϵ.
Vi har nu

$$\begin{aligned}
\iiint_{V_\epsilon}\nabla\cdot\mathbf{A}\,dxdydz &= [x=\rho\cos\phi, y=\rho\sin\phi,\ \epsilon\le\rho\le 1,\ 0\le\phi\le 2\pi]\\
&= \int_\epsilon^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{1+\sqrt{1-\rho^2}}\frac{2}{\rho}\,dz\right)d\phi\right)\rho d\rho\\
&= 8\pi\int_\epsilon^1\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\\
&= [\rho=\sin\theta,\ -\pi/2\le\theta\le\pi/2]\\
&= 8\pi\int_{\arcsin\epsilon}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\\
&= 4\pi\int_{\arcsin\epsilon}^{\pi/2}[1+\cos 2\theta]\,d\theta\\
&= 4\pi\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\epsilon-\frac{\sin(2\arcsin\epsilon)}{2}\right].
\end{aligned}$$

Vidare parametriserar vi C_ϵ med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi,z) = \epsilon\hat{\rho} + z\,\hat{z}$ där $(\phi,z)\in D_\epsilon$ där $D_\epsilon : 0\le\phi\le 2\pi,\ 1-\sqrt{1-\epsilon^2}\le z\le 1-\sqrt{1-\epsilon^2}$. Vi har då $\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z = \epsilon\hat{\rho}$. Då alla normaler ska peka ut ur V_ϵ så är bidraget från till flödet genom C_ϵ

$$
\begin{aligned}
\iint_{C_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_\epsilon &= -\iint_{D_\epsilon} \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)\,d\phi dz \\
&= -\int_{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}^{1+\sqrt{1+\epsilon^2}} \left(\int_0^{2\pi} \left[\hat{\rho}+\frac{z}{\epsilon}\,\hat{z}\right]\cdot(\epsilon\,\hat{\rho})\,d\phi\right)\,dz \\
&= -4\pi\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}).
\end{aligned}
$$

Sluligen får vi

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\,dS_\epsilon &= \iiint_{V_\epsilon} \nabla\cdot\mathbf{A}\,dxdydz - \iint_{C_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\,dC_\epsilon \\
&= 2\pi^2 - 4\pi\arcsin\epsilon - 2\pi\sin(2\arcsin\epsilon) + 4\pi\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2},
\end{aligned}
$$

av vilket det följer att det sökta flödet är

$$
\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \lim_{\epsilon\to 0_+}\iint_{S_\epsilon} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_\epsilon\,dS_\epsilon = 2\pi^2.
$$