LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

# TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.
# 2019-10-21, kl 14.00–18.00

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget $n$, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och $n$ godkända uppgifter.
Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.
Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

---

1. Beräkna ytintegralen $\iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 16y^2}\, dS$ där $S$ är den del av ytan $z = x^2 + 2y^2$ som är innanför paraboloiden $z = 3 - 2x^2 - y^2$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = x^2\,\hat{x} + y^2\,\hat{y} + (x^2 + y^2 + z^2)\,\hat{z}$ genom ytan $S$, där $S$ är ytan $z = 2 - x^2 - y^2,\ \ z \geq 0$. Riktningen ges av vilkoret $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{z} > 0$. Motivera noga.

3. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där vektorfältet $\mathbf{A}$ är

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (1 + y^2)\,\hat{x} + (2xy + z^2)\,\hat{y} + 2yz\,\hat{z}$$

och $\Gamma$ är den del av skärningskurvan mellan paraboloiden $2z = 4 - (x^2 + y^2)$ och planet $x + y + z = 1$ för vilken $x \geq 1$. $\Gamma$ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$.

4. Bestäm alla funktioner $f(r)$ så att vektorfältet

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = f(r)\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta \sin\phi\,\hat{r} + \sin 2\theta \sin\phi\,\hat{\theta} + \sin\theta\cos\phi\,\hat{\phi}\right)$$

är ett potentialfält. Bestäm sedan alla potentialer till $\mathbf{A}$ för dessa $f(r)$. Motivera noga.

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \left(2xz + \frac{y}{x^2 + y^2}\right)\hat{x} + \left(z - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)\hat{y} + (x^2 + y)\,\hat{z}$$

och $\Gamma$ är skärningskurvan mellan cylindern $9x^2 + 4y^2 = 36$ och planet $x + y + z = 1$. $\Gamma$ genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}\,\hat{x} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}\,\hat{y} + \frac{z}{(x^2 + y^2)^{1/2}}\,\hat{z}$$

genom ytan $S : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. Riktningen: bort från $z$-axeln.