LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.
2013-10-31, kl 14.00–18.00

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.
Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.
Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

---

1. Beräkna arean av den del av sfären $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ som är innanför sfären $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 3$.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = z^2 x\hat{x} + y^3\hat{y} + 2zx^2\hat{z}$ ut genom ytan $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ då $z \geq 0$. Normalen pekar bort från origo. Motivera noga.

3. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = 3r^2 \sin^2\theta \cos\phi \, \hat{r} + r^2 \sin 2\theta \cos\phi \, \hat{\theta} - r^2 \sin\theta \sin\phi \hat{\phi}$$

och Γ är skärningskurvan mellan planet $x + y = 0$ och ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$ med $x \leq 0,\ y, z \geq 0$. Orientering är moturs sett från punkten $(1, 1, 0)$ av råttan Robert när han tittar upp mot punkten $(0, 0, \sqrt{3})$.

4. Bestäm konstanterna a, b så att vektorfältet

$$\mathbf{A}(\rho, \phi, z) = (a+1)\rho z^2 \sin^2\phi \, \hat{\rho} + (b+3)\rho z^2 \sin 2\phi \, \hat{\phi} + 2\rho^2 z \sin^2\phi \, \hat{z}$$

har en potential och beräkna då alla potentialer till $\mathbf{A}$.

5. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y) = \left[x + \frac{y}{3x^2 + 2y^2}\right] \hat{x} + \left[y - \frac{x}{3x^2 + 2y^2}\right] \hat{y}$$

och Γ är kurvan $5x^2 + 6y^2 = 50$ i xy-planet. Kurvan genomlöps moturs.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}\hat{x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}\hat{y} - \frac{z}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}\hat{z}$$

genom ytan $x^2 + 2y^2 = z^2 + 2,\ 0 \leq z \leq \sqrt{2}$, bort från z-axeln.