TATA44 Lösningar 31/10/2013.

1.) Lösning 1: Sfären $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ skär sfären $x^2+y^2+(z-3)^2=3$ då $(z-3)^2-(z-1)^2=2$ och enkla räkningar ger nu $z=3/2$. Vi söker arean av $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ 3/2\leq z\leq 2$ och vi parametriserar S genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\rho,\phi)=\rho\,\hat{\rho}+(1+\sqrt{1-\rho^2})\,\hat{z}$ med $(\rho,\phi)\in D$ där $D: 0\leq\rho\leq\sqrt{3}/2,\ 0\leq\phi\leq 2\pi$ (observera att $\rho=\sqrt{3}/2$ då $z=3/2$ och $\rho=0$ då $z=2$). Vi har

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi &= \left(\hat{\rho}-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\hat{z}\right)\times(\rho\,\hat{\phi})\\ &= \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\,\hat{\rho}+\rho\,\hat{z}.\end{aligned}$$

Arean av S är nu

$$\begin{aligned}A(S) &= \iint_S dS\\ &= \iint_D |\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi|d\rho d\phi\\ &= \iint_D \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho d\phi\\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho\\ &= 2\pi\left[-\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^{\sqrt{3}/2}\\ &= 2\pi\left[1-\frac{1}{2}\right]\\ &= \pi.\end{aligned}$$

Lösning 2: Sfären $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ skär sfären $x^2+y^2+(z-3)^2=3$ då $(z-3)^2-(z-1)^2=2$ och enkla räkningar ger nu $z=3/2$. Vi söker arean av $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ 3/2\leq z\leq 2$ och vi parametriserar S genom ortsvektorn

$$\mathbf{r}(\theta,\phi)=\cos\phi\sin\theta\,\hat{x}+\sin\phi\sin\theta\,\hat{y}+(1+\cos\theta)\,\hat{z}=\sin\theta\,\hat{\rho}+(1+\cos\theta)\,\hat{z}.$$

När $z=3/2$ då är $\cos\theta=1/2$ ty $z=1+\cos\theta$. Vidare är $x^2+y^2=3/4$ vilket medför att $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sin\theta=\sqrt{3}/2$, och då måste $\theta=\pi/3$ då $z=3/2$. Då är $(\theta,\phi)\in D$ där $D: 0\leq\theta\leq\pi/3,\ 0\leq\phi\leq 2\pi$. Vi har

$$\mathbf{r}'_\theta\times\mathbf{r}'_\phi=(\cos\theta\,\hat{\rho}-\sin\theta\,\hat{z})\times(\sin\theta\,\hat{\phi})=\sin^2\theta\,\hat{\rho}+\sin\theta\cos\theta\,\hat{z},$$

och vi erhåller

$$
\begin{aligned}
A(S) &= \iint_S dS \\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\phi| d\theta d\phi \\
&= \iint_D \sin\theta \, d\theta d\phi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/3} \sin\theta \, d\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

2.) En standardräkning ger att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 2x^2 + 3y^2 + z^2$. Lägg till ytan $S_1 : 2x^2 + 3y^2 \leq 1, \ z = 0$. Ytorna $S + S_1$ avgränsar en kropp $V : 2x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 1, \ z \geq 0$. Flödet av $\mathbf{A}$ ut ur V genom S är

$$
\Phi_1 = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS
$$

Enligt Gauss' Sats har vi

$$
\iint_{S+S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V (2x^2 + 3y^2 + z^2) dxdydz.
$$

På S_1 är $z = 0$ och $\hat{n} = -\hat{z}$ och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{n} = 2zx^2 = 0$ på S_1, vilket nu ger att

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS \\
&= \iiint_V (2x^2 + 3y^2 + z^2) dxdydz \\
&= \left[x = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos\phi \sin\theta, \ y = \frac{r}{\sqrt{3}} \sin\phi \sin\theta, \ z = r\cos\theta, \ 0 \leq r \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq \pi/2, \ 0 \leq \phi \leq 2\pi \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin\theta \, d\phi \right) d\theta \right) dr \\
&= \frac{2\pi}{5\sqrt{6}} \\
&= \frac{\pi\sqrt{6}}{15}.
\end{aligned}
$$

3.)Lösning 1: En standardkalkyl (i sfäriska koordinater) ger

$$
\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\,\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\phi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ 3r^2 \sin^2\theta \cos\phi & r^3 \sin 2\theta \cos\phi & -r^3 \sin^2\theta \sin\phi \end{vmatrix} = 0.
$$

(Man måste ta hänsyn till skalfaktorerna i första och tredje raderna! Se formelbladet.) Då är $\mathbf{A}$ ett potentialfält med $\mathbf{A} = \nabla\Phi(r, \theta, \phi)$. Observera att

$$\mathbf{A} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi}.$$

Vi har då följande ekvationssystemet:

$$\Phi'_r = 3r^2\sin^2\theta\cos\phi, \quad ,\Phi'_\theta = r^3\sin 2\theta\cos\phi, \quad \Phi'_\phi = -r^3\sin^2\theta\sin\phi.$$

Ekvationen $\Phi'_r = 3r^2\sin^2\theta\cos\phi$ ger $\Phi = r^3\sin^2\theta\cos\phi + g(\theta,\phi)$ där $g(\theta,\phi)$ är en godtycklig C^1-funktion. Insättning av detta uttryck för Φ i ekvationen $\Phi'_\theta = r^3\sin 2\theta\cos\phi$ ger $g'_\theta = 0$, och insättning av samma uttryck för Φ i $\Phi'_\phi = -r^3\sin^2\theta\sin\phi$ ger $g'_\phi = 0$. Således är $g = C$, en godtycklig konstant och vi har då

$$\Phi(r,\theta,\phi) = r^3\sin^2\theta\cos\phi + C.$$

Planet $x+y=0$ skär $x^2+2y^2+3z^2=9$ i cirkeln $x^2+z^2=3$, $y=-x$. Eftersom $x \le 0$ medan $y,z \ge 0$ och kurvan genomlöps moturs sett från $(1,1,0)$, så är startpunkten $(-\sqrt{3},\sqrt{3},0)$ i xy-planet och slutpunkten är $(0,0,\sqrt{3})$ på z-axeln. Översatt till sfäriska koordinater, startpunkten är $(r,\theta,\phi) = (\sqrt{6},\pi/2,3\pi/4)$ och slutpunkten är $(r,\theta,\phi) = (\sqrt{3},0,3\pi/4)$ Då $\mathbf{A} = \nabla\Phi$, får vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \Phi(\sqrt{3},0,3\pi/4) - \Phi(\sqrt{6},\pi/2,3\pi/4) = 6\sqrt{3}.$$

Lösning 2: $\mathbf{A}$ är ett potentialfält om det finns $\Phi(r,\theta,\phi)$ med $\mathbf{A} = \nabla\Phi$. Då gäller att

$$\mathbf{A} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi}.$$

Vi har då följande ekvationssystemet:

$$\Phi'_r = 3r^2\sin^2\theta\cos\phi, \quad ,\Phi'_\theta = r^3\sin 2\theta\cos\phi, \quad \Phi'_\phi = -r^3\sin^2\theta\sin\phi,$$

som är lösbart eftersom $\Phi''_{r\theta} = \Phi''_{\theta r}$, $\Phi''_{r\phi} = \Phi''_{\phi r}$, $\Phi''_{\theta\phi} = \Phi''_{\phi\theta}$. Således är $\mathbf{A}$ ett potentialfält. Resten av lösningen är som i Lösning 1.

4.) Lösning 1: Om $\mathbf{A}$ är ett potentialfält då ska $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion Φ i det område där $\mathbf{A}$ är definierat. En potential finns då om $\nabla\times\mathbf{A} = 0$ i detta område. Ekvationen

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\,\hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \partial_\phi & \partial_z \\ (a+1)\rho z^2\sin^2\phi & (b+3)\rho^2 z^2\sin 2\phi & 2\rho^2 z\sin^2\phi \end{vmatrix} = 0$$

ger oss systemet

$$(b+2)\rho z\sin 2\phi = 0, \quad (a-1)\rho z\sin^2\phi = 0, \quad (2b-a+5)z^2\sin 2\phi = 0.$$

Dessa ekvationer ska hålla i ett område, vilket ger nu

$$a = 1, \quad b = -2.$$

För dessa värden är

$$\mathbf{A} = 2\rho z^2\sin^2\phi\,\hat{\rho} + \rho z^2\sin 2\phi\,\hat{\phi} + 2\rho^2 z\sin^2\phi\,\hat{z}.$$

Då har vi $\mathbf{A} = \nabla\Phi$. Observera att

$$\mathbf{A} = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

och då erhåller vi ekvationssystemet

$$\Phi'_\rho = 2\rho z^2 \sin^2\phi, \quad \Phi'_\phi = \rho^2 z^2 \sin 2\phi, \quad \Phi'_z = 2\rho^2 z \sin^2\phi.$$

Ekvationen $\Phi'_\rho = 2\rho z^2 \sin^2\phi$ ger $\Phi = \rho^2 z^2 \sin^2\phi + g(\phi, z)$. Insättning av detta i $\Phi'_\phi = \rho^2 z^2 \sin 2\phi$ ger $g'_\phi(\phi, z) = 0$ och insättning i $\Phi'_z = 2\rho^2 z \sin^2\phi$ ger $g'_z(\phi, z) = 0$.

Vi ser nu att

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \rho^2 z^2 \sin^2\phi + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Lösning 2: Om $\mathbf{A}$ är ett potentialfält då ska $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för någon funktion $\Phi(\rho, \phi, z)$ i det område där $\mathbf{A}$ är definierat. Vi har då

$$\mathbf{A} = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

och detta ger ekvationssystemet

$$\Phi'_\rho = (a+1)\rho z^2 \sin^2\phi, \quad \Phi'_\phi = (b+3)\rho^2 z^2 \sin 2\phi, \quad \Phi'_z = 2z\rho^2 \sin^2\phi.$$

Detta system har en lösning endast om

$$\Phi''_{\rho\phi} = \Phi''_{\phi\rho}, \quad \Phi''_{\rho z} = \Phi''_{z\rho}, \quad \Phi''_{\phi z} = \Phi''_{z\phi},$$

och detta ger oss systemet

$$(a{+}1)\rho z^2 \sin 2\phi = 2(b{+}3)\rho z^2 \sin 2\phi, \quad 2\rho z(a{+}1)\sin^2\phi = 4\rho z \sin^2\phi, \quad (b{+}3)z\rho^2 \sin 2\phi = \rho^2 z \sin 2\phi,$$

som skall gälla i ett område (öppen mängd) och då måste $a + 1 = 2$, $b + 3 = 1$ vilket ger $a = 1, b = -2$. Då är $\mathbf{A}$ ett potentialfält endast för $a = 1, b = -2$. Resten av lösningen är som i Lösning 1.

5.) Vektorfältet $\mathbf{A}$ kan skrivas som $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ med

$$\mathbf{A}_1 = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{y}{3x^2 + 2y^2}\,\hat{x} - \frac{x}{3x^2 + 2y^2}\,\hat{y}.$$

Enligt Greens formel får vi att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma x dx + y dy = 0.$$

(Ett annat sätt att se detta är att konstatera att $\mathbf{A}_1$ är ett C^1-fält i alla punkter och är ett potentialfält med potential $\Phi(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$). För att behandla $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}$ lägger vi till kurvan $\Gamma_1 : 3x^2 + 2y^2 = 1$. Sätt

$$P(x, y) = \frac{y}{3x^2 + 2y^2}, \quad Q(x, y) = -\frac{x}{3x^2 + 2y^2}.$$

Om D är området mellan Γ och Γ_1 så har vi enligt Greens formel

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma+\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma+\Gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.\end{aligned}$$

Av detta följer att

$$\int_\Gamma \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r}$$

där både Γ och Γ_1 genomlöps moturs. På Γ_1 är $3x^2 + 2y^2 = 1$ och vi kan parametrisera Γ_1 genom ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi) = \dfrac{\cos\phi}{\sqrt{3}}\,\hat{x} + \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{y}$ med $\phi : 0 \to 2\pi$. På Γ_1 är $\mathbf{A}_2 = \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{x} - \dfrac{\cos\phi}{\sqrt{3}}\,\hat{y}$ och vi får

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{r}'(\phi)d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{x} - \frac{\cos\phi}{\sqrt{3}}\,\hat{y}\right] \cdot \left[-\frac{\sin\phi}{\sqrt{3}}\,\hat{x} + \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}}\right] d\phi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= -\frac{\pi\sqrt{6}}{3}.\end{aligned}$$

Vi får då

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\pi\sqrt{6}}{3}.$$

6.) Lösning 1: En standardkalkyl ger $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ i alla punkter där $x^2 + 2y^2 \neq 0$, d.v.s. i alla punkter förutom på z-axeln (där $\mathbf{A}$ är singulärt). Vi lägger till följande ytor: cylindern $C : x^2 + 2y^2 = 2,\ 0 \leq z \leq \sqrt{2}$ och skivan $L : 2 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4,\ z = \sqrt{2}$. Dessa ytor omsluter en kropp V inom vilken $\mathbf{A}$ är ett C^1-vektorfält och $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Enligt Gauss' Sats får vi nu att

$$\iint_{S+L+C} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = 0.$$

Alla normaler till de enskilda delytorna pekar ut från V. Vi har då att det sökta flödet är

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\iint_L \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L dL - \iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C.$$

Parametrisera C med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi, z) = \sqrt{2}\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} + z\hat{z}$ med $(\phi, z) \in D$ där $D : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq \sqrt{2}$. Observera att vi då har

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z &= \left(-\sqrt{2}\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}\right) \times \hat{z} \\ &= \cos\phi\,\hat{x} + \sqrt{2}\sin\phi\,\hat{y}.\end{aligned}$$

Vi ser att $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z$ pekar ut från z-axeln och således in i V ty $(\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) \cdot \hat{\rho} = \cos^2\phi + \sqrt{2}\sin^2\phi \geq 0$.

Vi får

$$\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C = -\iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) d\phi dz$$

eftersom $\hat{\mathbf{n}}_C$ pekar in mot z-axeln. Sedan har vi

$$\begin{aligned}
\iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi, z)) \cdot (\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_z) d\phi dz &= \iint_D \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{z}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sqrt{2}\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix} d\phi dz \\
&= \iint_D d\phi dz \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) dz \\
&= 2\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

och då erhåller vi

$$\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C = -2\sqrt{2}\pi.$$

På skivan L är normalen $\hat{\mathbf{n}}_L = \hat{z}$ och $z = \sqrt{2}$ och då får vi

$$\begin{aligned}
\iint_L \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L dL &= -\iint_{2 \leq x^2 + 2y^2 \leq 4} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} dxdy \\
&= \left[x = r\cos\phi,\ y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\phi,\ \sqrt{2} \leq r \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \right] \\
&= -\int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{2\pi} \left| \frac{d(x, y)}{d(r, \phi)} \right| \frac{\sqrt{2}}{r} d\phi \right) dr \\
&= -\int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{r} d\phi \right) dr \\
&= -\int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) dr \\
&= -2\pi(2 - \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Således erhåller vi

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\
&= -\iint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_C dS_C - \iint_L \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_L dL \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

Lösning 2: En standardkalkyl ger $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ i alla punkter där $x^2+2y^2\neq 0$, d.v.s. i alla punkter förutom på z-axeln (där $\mathbf{A}$ är singulärt). Vi lägger till följande ytor: cylindern $C: x^2+2y^2=1,\ 0\le z\le\sqrt{2}$, skivan $S_1: 1\le x^2+2y^2\le 2,\ z=0$ och skivan $S_2: 1\le x^2+2y^2\le 4,\ z=\sqrt{2}$. Dessa ytor omsluter en kropp V inom vilken $\mathbf{A}$ är ett C^1-vektorfält och $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$. Enligt Gauss' Sats får vi nu att

$$\iint_{S+S_1+S_2+C}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=\iiint_V\nabla\cdot\mathbf{A}\,dV=0.$$

Alla normaler till de enskilda delytorna pekar ut från V. Vi har då att det sökta flödet är

$$\Phi=\iint_S\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=-\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1dS_1-\iint_{S_2}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2dS_2-\iint_C\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_CdS_C.$$

Observera att normalen $\hat{\mathbf{n}}_1=-\hat{z}$ och då är $\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1=-\dfrac{z}{\sqrt{x^2+2y^2}}=0$ på S_1, vilket gör att $\iint_{S_1}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1dS_1=0$.

Parametrisera C med ortsvektorn $\mathbf{r}(\phi,z)=\cos\phi\,\hat{x}+\dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{y}+z\hat{z}$ med $(\phi,z)\in D$ där $D: 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le z\le\sqrt{2}$. Observera att vi då har

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z&=\left(-\sin\phi\,\hat{x}+\frac{\cos\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{y}\right)\times\hat{z}\\&=\frac{\cos\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{x}+\sin\phi\,\hat{y}.\end{aligned}$$

Vi ser att $\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z$ pekar ut från z-axeln och således in i V ty $(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)\cdot\hat{\rho}=\dfrac{\cos^2\phi}{\sqrt{2}}+\sin^2\phi\ge 0$.

Vi får

$$\iint_C\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_CdS_C=-\iint_D\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)d\phi dz$$

eftersom $\hat{\mathbf{n}}_C$ pekar in mot z-axeln. Sedan har vi

$$\begin{aligned}\iint_D\mathbf{A}(\mathbf{r}(\phi,z))\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_z)d\phi dz&=\iint_D\begin{bmatrix}\cos\phi\\ \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\\ -z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{\cos\phi}{\sqrt{2}}\\ \sin\phi\\ 0\end{bmatrix}d\phi dz\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_D d\phi dz\\&=2\pi\end{aligned}$$

och då erhåller vi

$$\iint_C\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_CdS_C=-2\pi.$$

På skivan S_2 är normalen $\hat{\mathbf{n}}_2=\hat{z}$ och $z=\sqrt{2}$ och då får vi

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_2} \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 &= -\iint_{1\le x^2+2y^2\le 4} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2y^2}}dxdy \\
&= \left[x = r\cos\phi,\ y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\phi,\ 1\le r\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi\right] \\
&= -\sqrt{2}\int_1^2\int_0^{2\pi}\left|\frac{d(x,y)}{d(r,\phi)}\right|\frac{1}{r}dr\,d\phi \\
&= -\sqrt{2}\int_1^2\int_0^{2\pi}\frac{r}{\sqrt{2}}.\frac{1}{r}drd\phi \\
&= -\int_1^2\int_0^{2\pi} drd\phi \\
&= -2\pi.
\end{aligned}
$$

Således erhåller vi

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS \\
&= -\iint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_C dS_C - \iint_{S_2}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 dS_2 \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$

Lösning 3: Parametrisera ytan genom att sätta $x = \rho\cos\phi,\ y = \dfrac{\rho\sin\phi}{\sqrt{2}}$ och då har vi $z = \sqrt{\rho^2-2}$ på ytan, och ortsvektorn för punkter på ytan är $\mathbf{r}(\rho,\phi) = \rho\cos\phi\,\hat{x} + \dfrac{\rho\sin\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{y} + \sqrt{\rho^2-2}\,\hat{z}$. Vi har $(\rho,\phi)\in D$ där $D: \sqrt{2}\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi$. Vidare

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'_\rho\times\mathbf{r}'_\phi &= \left(\cos\phi\,\hat{x} + \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{y} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-2}}\,\hat{z}\right)\times\left(-\rho\sin\phi\,\hat{x} + \frac{\rho\cos\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{y}\right) \\
&= -\frac{\rho^2\cos\phi}{\sqrt{2}\sqrt{\rho^2-2}}\,\hat{x} - \frac{\rho^2\sin\phi}{\sqrt{2}\sqrt{\rho^2-2}}\,\hat{y} + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\,\hat{z}.
\end{aligned}
$$

På ytan har vi

$$
\mathbf{A} = \cos\phi\,\hat{x} + \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}}\,\hat{y} - \frac{\sqrt{\rho^2-2}}{\rho}\,\hat{z}.
$$

Det sökta flödet är nu

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS \\
&= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(\rho,\phi))\cdot(\mathbf{r}'_\phi\times\mathbf{r}'_\rho)\,d\phi\,d\rho \quad \text{eftersom normalen ska peka bort från } z\text{-axeln} \\
&= \iint_D \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \dfrac{\sin\phi}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{\sqrt{\rho^2-2}}{\rho} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\rho^2\cos\phi}{\sqrt{2}\sqrt{\rho^2-2}} \\ \dfrac{\rho^2\sin\phi}{\sqrt{2}\sqrt{\rho^2-2}} \\ -\dfrac{\rho}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} d\phi\,d\rho \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_D \left[\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2-2}}+\sqrt{\rho^2-2}\right] d\phi\,d\rho \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\int_0^{2\pi}\frac{2(\rho^2-1)}{\sqrt{\rho^2-2}}d\phi\right)d\rho \\
&= 2\sqrt{2}\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\rho^2-1}{\sqrt{\rho^2-2}}\,d\rho.
\end{aligned}
$$

Enligt Hermites Rotansats (se läroböckerna i envariabel analys) sätter vi

$$\int \frac{\rho^2-1}{\sqrt{\rho^2-2}}\,d\rho = (A\rho+B)\sqrt{\rho^2-2}+\int\frac{K}{\sqrt{\rho^2-2}}\,d\rho.$$

Derivering av både vänster- och högerled ger nu

$$\frac{\rho^2-1}{\sqrt{\rho^2-2}} = A\sqrt{\rho^2-2}+(A\rho+B)\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-2}}+\frac{K}{\sqrt{\rho^2-2}}$$

av vilket vi får att

$$\rho^2-1 = A(\rho^2-2)+(A\rho+B)\rho+K = 2A\rho^2+B\rho+K-2A$$

och nu ser vi att $A=1/2,\ B=K=0$ och vi har då

$$\int\frac{\rho^2-1}{\sqrt{\rho^2-2}} = \frac{\rho}{2}\sqrt{\rho^2-2}+C$$

och då är flödet

$$
\begin{aligned}
\Phi &= 2\sqrt{2}\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\rho^2-1}{\sqrt{\rho^2-2}}\,d\rho \\
&= 2\sqrt{2}\left[\frac{\rho}{2}\sqrt{\rho^2-2}\right]_{\sqrt{2}}^{2} \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$