LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 44 Vektoranalys. TEN 1.
2010-10-23, kl 8.00–12.00

Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter.
Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten.
Lösningar till tentamen återfinns efter skrivtidens slut på kursens hemsidor.

---

1. Beräkna arean av den del av konen $z = 3 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger innanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

2. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A} = -yz\,\hat{x} + xz\,\hat{y} + xy\,\hat{z}$ och Γ är skärningskurvan mellan planet $x + y + z = 3$ och cylindern $x^2 + y^2 = 9$. Γ genomlöps moturs sett från $(0, 0, 51)$.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = xy^2\,\hat{x} + yz^2\,\hat{y} + x^2z\,\hat{z}$ genom ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x, y, z \geq 0$ i riktningen som ges genom $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

4. Bestäm en potential för vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{(1 - r^2)\cos\phi\sin\theta}{(1 + r^2)^2}\hat{r} + \frac{\cos\phi\cos\theta}{1 + r^2}\hat{\theta} - \frac{\sin\phi}{1 + r^2}\hat{\phi}$$

och beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där Γ är skärningskurvan mellan planet $x = y$ och ellipsoiden $x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 25$ med $x, y, z \geq 0$ och Γ genomlöps moturs sett från punkten $(-1, -2, 0)$.

5. Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_\Gamma \frac{x}{(x^2 + 4y^2)^{3/2}}dx + \frac{4y}{(x^2 + 4y^2)^{3/2}}dy$$

där Γ är den del av den räta linjen $x + y = 1$ med $x, y \geq 0$ i xy-planet och $y : 0 \to 1$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A} = \left(\frac{x}{(y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

ut ur ytan $x = y^2 + z^2$ med $0 \leq x \leq 1$ så att $\hat{n} \cdot \hat{x} < 0$.

LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Peter Basarab-Horwath

TATA 44 Vector analysis. TEN 1.
2010-10-23, 08.00–12.00

Each question is marked 0, 1, 2 or 3 points. An answer to a question is deemed to be good if it obtains at least 2 points. In order to obtain grade n, $n = 3, 4, 5$, on the exam you need $3n - 1$ points and n good answers.
You are allowed to use the formula sheet *Formelbladet i vektoranalys*. No calculators are allowed.
The solutions to the examination will posted on the course homepage after the examination.

---

1. Calculate the area of that part of the cone $z = 3-2\sqrt{x^2+y^2}$ which lies within the paraboloid $z = x^2 + y^2$.

2. Calculate the line integral $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ where $\mathbf{A} = -yz\,\hat{x} + xz\,\hat{y} + xy\,\hat{z}$ and Γ is the curve given by the intersection of the plane $x + y + z = 3$ and the cylinder $x^2 + y^2 = 9$. Γ is traversed anticlockwise as seen from $(0, 0, 51)$.

3. Calculate the flux of the vector field $\mathbf{A} = xy^2\,\hat{x} + yz^2\,\hat{y} + x^2z\,\hat{z}$ through the surface $x^2+y^2+z^2 = 1,\ \ x, y, z \geq 0$ in the direction defiend by $\hat{n}\cdot\hat{z} > 0$.

4. Find a potential function for the vector field

$$\mathbf{A} = \frac{(1-r^2)\cos\phi\sin\theta}{(1+r^2)^2}\hat{r} + \frac{\cos\phi\cos\theta}{1+r^2}\hat{\theta} - \frac{\sin\phi}{1+r^2}\hat{\phi}$$

and calculate the line integral $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ where Γ is given by the intersection of the plane $x = y$ and the ellipsoid $x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 25$ with $x, y, z \geq 0$ and Γ is traversed anticlockwise as seen from $(-1, -2, 0)$.

5. Calculate the line integral

$$I = \int_\Gamma \frac{x}{(x^2+4y^2)^{3/2}}dx + \frac{4y}{(x^2+4y^2)^{3/2}}dy$$

where Γ that part of the straight line $x + y = 1$ with $x, y \geq 0$ in the xy-plane and $y : 0 \to 1$.

6. Calculate the flux of the vector field

$$\mathbf{A} = \left(\frac{x}{(y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

out of the surface $x = y^2 + z^2$ with $0 \leq x \leq 1$ so that $\hat{n}\cdot\hat{x} < 0$.