Instruktioner: Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter. Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys.* Ingen räknadosa tillåten. Lycka till!

(1) Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför planet $z = 0$.

(2) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A}(x, y, z) = (9xz^2, yx^2, 4zy^2)$ ut genom ytan

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 4, z \geq 0\}$$

där i varje punkt på S väljer man den enhetsnormal $\hat{n}$ som lyder $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

(3) Beräkna kurintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (xz, xy^2 + 2z, xy + z)$$

och Γ är kurvan $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ med

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1\colon x = 0, y^2 + z^2 = 1, z > 0, y\colon -1 \to 1;\\
&\Gamma_2\colon z = 0, x + y = 1, y\colon 1 \to 0; \quad \text{och}\\
&\Gamma_3\colon z = 0, x - y = 1, y\colon 0 \to -1.
\end{aligned}$$

(4) Finn alla potentialer till vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \big(4(x^2 + y^2 + z)x, 4(x^2 + y^2 + z)y, 2(x^2 + y^2 + z)\big).$$

(5) Beräkna kurintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, z\right)$$

och Γ är skärningskurvan mellan cylindern $2x^2 + 3y^2 = 9$ och planet $x + y + z = 17$. Kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 20)$.

(6) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{xz}{(5 + x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{zy}{(5 + x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z^2}{(5 + x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$$

genom cylinderytan $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 2$.