Instruktioner: Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng och n godkända uppgifter. Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys.* Ingen räknadosa tillåten. Lycka till!

(1) Beräkna arean av den del av paraboloiden $2z = x^2+y^2$ som ligger i klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 3$.

(2) Bestäm en potential till vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = ((2x+z)\cos(x^2+xz), -(z+1)\sin(y+yz), x\cos(x^2+xz) - y\sin(y+yz))$$

och sen beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ där γ är kurvan $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3, \pi t - \sin(\pi t/2))$ med $t \in [0, 1]$.

(3) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A}(x, y, z) = (xy^2, yz^2, zx^2)$ genom ytan $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x, y, z \geq 0$ i riktningen som ges genom valet av normalen som pekar i den positiva z-rikningen.

(4) Bestäm konstanten $a \in \mathbf{R}$ så att vektorfältet

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(r, \theta, \phi) &= [2r\sin 2\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi]\,\hat{r}\\ &\quad + [2r\cos 2\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi]\,\hat{\theta} + [-2r\cos\theta\sin\phi + \cos\phi]\,\hat{\phi}\end{aligned}$$

har en potential och beräkna då alla potentialer till $\mathbf{A}$.

(5) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

och Γ är skärningskurvan mellan planet $x + 2y + 3z = 10$ och cylindern $x^2 + y^2 = 2$. Kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$. Motivera noga!

(6) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

ut ur ytan $x = y^2 + z^2$ med $0 \leq x \leq 1$ så att $\mathbf{n}\cdot(1, 0, 0) < 0$.