Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n-1$ poäng. Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys.* Ingen räknadosa tillåten. Lycka till!

(1) Betrakta en yta S som parametriseras av funktionen $\mathbf{u}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definierad enligt formeln

$$\mathbf{u}(s,t) = (e^s - e^{-s}, t, \cos(st)).$$

(a) Använd parametriseringen $\mathbf{u}$ för att ta fram en normal vektor till ytan S uttryckt i s och t.

(b) Visa att normalen du beräknade i del (a) är aldrig noll.

(2) Låt $S = \{(x,y,z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ vara en sfär med en given radie $a > 0$.

(a) Beräkna $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$.

(b) Beräkna $\iint_S z^2 d\sigma$. [Tips: Symmetri och svaret från (a) kan förkorta dina beräkningar.]

(3) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som är definierad enligt formeln

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (\sin(yz), zx\cos(yz) + 3y^2, xy\cos(yz)).$$

(a) Vad menar vi när vi säger ett vektorfält är ett *potentialfält*?

(b) Visa att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält.

(4) Betrakta ytan $S = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 = 1\}$ och låt $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara ett vektorfält som ges av formeln

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (-e^x\cos y, e^x \sin y, z^6)$$

för alla $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom S orienterad med en normal som pekar bort från origo.

(5) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där $\mathbf{F}(x,y,z) = (2yz, xz, xy)$ för alla $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ och Γ är snittet mellan cylindern $\{(x,y,z)\colon x^2+y^2 = 1\}$ och paraboliska cylindern $\{(x,y,z)\colon z = y^2\}$ orienterad moturs sett från punkten $(0,0,17)$.

(6) Betrakta ett vektorfält

$$\mathbf{F}(r, \theta, \varphi) = (5\cos\theta + r\cos^2\theta)\mathbf{e}_r - \sin\theta(5 + r\cos\theta)\mathbf{e}_\theta$$

som ges i sfäriska koordinater (r, θ, φ).

(a) Beräkna $\operatorname{div} \mathbf{F}$.

(b) Beräkna flödet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma$$

där S är en slipad orienterad yta som är randen till en öppen mängd V av volym π. Normalvektorn $\hat{\mathbf{n}}$ väljes så att den pekar ut från V.