Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng. Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten. Lycka till!

(1) Betrakta en yta S som beskrivs i cylinderkoordinater av ekvationen $z = f(\rho, \varphi)$ där (ρ, φ) varierar i ett område D där ρ är positivt och f är ett C^1 funktion.

(a) Ge en parametrisering $\mathbf{u}\colon D \to S$ av ytan S där $\mathbf{u}(\rho, \varphi)$ är kartesiska koordinater (d.v.s. xyz-koordinater) av en punkt på S.

(b) Visa att arean av ytan S ges av formeln

$$\iint_D \sqrt{1 + f'_\rho(\rho, \varphi)^2 + \frac{f'_\varphi(\rho, \varphi)^2}{\rho^2}}\, \rho d\rho d\varphi.$$

(2) Använd formeln från uppgift (1)(b) för att beräkna arean av en yta S som ges i cylinderkoordinator av ekvationen $z = \rho^2 \sin(2\varphi)$ där (ρ, φ) varierar i ett område $D = \{(\rho, \varphi)\colon \frac{1}{2} \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.

(3) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som är definierad enligt formeln

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x+y}\mathbf{i} + e^{xy}\mathbf{j}.$$

Avgör med bevis om $\mathbf{F}$ är ett potentialfält eller inte.

(4) Betrakta ytan $S = \{(x, y, z)\colon y = 10 - x^2 - z^2, y \geq 1\}$ orienterad så att enhets normalen $\hat{\mathbf{n}}$ har en positiv y-komponent. Beräkna

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

där

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + 5z, e^x \cos(yz), x^2 y).$$

(5) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$. Man kan lätt kontrollera att

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1.$$

Använd $\mathbf{F}$ och Gauss sats för att beräkna volymen av

$$M = \{(x, y, z)\colon 3x^2 + 3y^2 - 16 < z < 9 - x^2 - y^2\}.$$

(6) Kom ihåg att Greens formel säger att

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

där D är ett begränsad öppen mängd i $\mathbf{R}^2$ med en tillräckligt snäll rand ∂D orienterad moturs, och P och Q är C^1 funktioner definierade på $D \cup \partial D$. Visa med hjälp av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

att Greens formel är ett specialfall av Stokes sats.