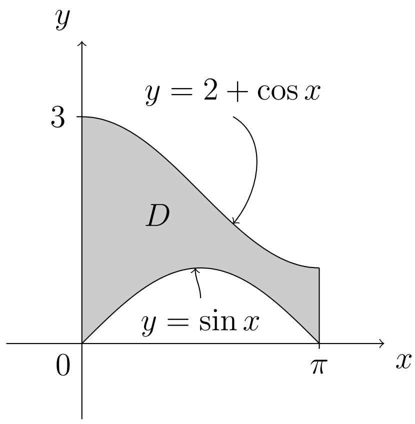
Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng. Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknedosa tillåten. Lycka till!

(1) Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F}(x, y) = e^x \mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ och γ är randkurvan till området D i figuren nedan orienterad moturs.



(2) Betrakta en enkel sammanhängande mängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ och en kontinuerligt deriverbart vektorfält $\mathbf{F} \colon \Omega \to \mathbf{R}^3$.

(a) Bevisa följande påstående.

$\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ i varje punkt $\mathbf{x} \in \Omega \implies \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för alla slutna C^1-kurvor γ i Ω.

(b) Vad kan gå fel med ditt bevis i (a) om Ω inte är en enkel sammanhängande mängd?

(3) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F} \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som är definierad enligt formeln

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (6xy^2 - 3x^2)\mathbf{i} + (y^2 + 6x^2 y)\mathbf{j}.$$

Avgör med bevis om $\mathbf{F}$ är ett potentialfält eller inte.

(4) Betrakta ytan $S = \{(x, y, z) \colon y = 12 - x^2 - z^2, y \geq 3\}$ orienterad så att enhets normalen $\hat{\mathbf{n}}$ har en positiv y-komponent. Beräkna

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma$$

där

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + 5z, e^x \cos(yz), x^2 y).$$

(5) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$. Man kan lätt kontrollera att

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1.$$

Använd $\mathbf{F}$ och Gauss sats för att beräkna volymen av

$$M = \{(x, y, z)\colon 3x^2 + 3y^2 - 16 < z < 9 - x^2 - y^2\}.$$

(6) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + 4x^2z\mathbf{k}$ ut ur randen till $V = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 5\}$.