Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n-1$ poäng. Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys.* Ingen räknadosa tillåten. Lycka till!

(1) Beräkna arean av den del av planet $2x + 2y + z = 1$ som är innanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

(2) Beräkna ytintegralen

$$\iint_S \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2}\, d\sigma,$$

där S den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ som är innanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(3) Betrakta ytan

$$S = \{(x, y, z)\colon z = 4 - 4x^2 - y^2, z \geq 0\},$$

orienterad så att normalen har en icke-negativ z-komponent, och vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, e^{y^2} + x, ze^{xy}).$$

Beräkna

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma.$$

[Tips: Skriv om integralen till en integral över en annan yta.]

(4) Definitionsmängden för vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x + xy^2}{y^2}, -\frac{x^2 + 1}{y^3}, 0\right)$$

är $D = \{(x, y, z)\colon y \neq 0\}$.

(a) Hitta en potential för $\mathbf{F}$.

(b) Beräkna arbetet

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där γ är en kurva i D från punkten $(0, 1, 3)$ till $(1, 1, 2)$.

(5) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x, 2y, 4z)$$

ut genom randen av kuben $Q = \{(x, y, z)\colon |x| \leq 2, |y| \leq 2, |z| \leq 2\}$.

(6) Bektrakta vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2}, 0\right)$$

(a) Beräkna rotationen av $\mathbf{F}$.

(b) Beräkna

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

där γ är skärningskurvan mellan konen $x^2 + y^2 = z^2$ och planet $x + 2z = 1$ orienterad moturs sett från $(-\frac{1}{3}, 0, 9)$.

Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av:

$$\nabla\Phi(u,v,w) = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(A_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(A_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(A_w h_u h_v)\right]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

För cylinderkoordinater: med $(u,v,w) = (\rho,\phi,z)$ har vi:

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1.$$

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}.$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \\ \hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \\ \hat{z} &= \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}. \end{aligned}$$

För sfäriska koordinater: med $(u,v,w) = (r,\theta,\phi)$ har vi:

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r\sin\theta.$$

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}.$$

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\ \hat{\theta} &= \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\ \hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}. \end{aligned}$$

Vektorformler

(1) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

(2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

(3) $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$

(4) $\nabla \cdot (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \cdot \mathbf{A} + \beta\nabla \cdot \mathbf{B}$

(5) $\nabla \times (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \times \mathbf{A} + \beta\nabla \times \mathbf{B}$

(6) $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$

(7) $\nabla \cdot (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \mathbf{A} + \Phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$

(8) $\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$

(9) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(10) $\nabla \cdot (\nabla\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater

(11) $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$ för alla Φ

(12) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter α, β, alla deriverbara skalärfält Φ, Ψ och alla deriverbara vektorfält $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.