Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng. Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys.* Ingen räknadosa tillåten. Lycka till!

(1) Beräkna arbetet

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

som utförs av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$$

längs kurvan γ som är cirkeln på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ med $z = 1/2$ orienterad medurs sett från origo.

(2) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = ye^z\mathbf{i} + yz\mathbf{k}$$

ut genom begränsningsytan S till tetraedern

$$V = \{(x, y, z)\colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + 2y + z \leq 4\}.$$

(3) Använd Greens sats för att beräkna arbete som görs av kräften

$$\mathbf{F}(x, y) = -2y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

längs kurvan γ med parametriseringen

$$r(t) = (2\cos t, \sin t) \quad \text{för } t \in [0, 2\pi]$$

(4) Låt $S = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ vara en sfär med en given radie $a > 0$.

(a) Beräkna $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)d\sigma$.

(b) Beräkna $\iint_S z^2 d\sigma$.

(5) Betrakta en enkel sammanhängande mängd $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ och en kontinuerligt deriverbart vektorfält $\mathbf{F}\colon \Omega \to \mathbf{R}^3$.

(a) Bevisa följande påstående.

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ i varje punkt } \mathbf{x} \in \Omega \implies \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ för alla slutna } C^1\text{-kurvor } \gamma \text{ i } \Omega.$$

(b) Vad kan gå fel med ditt bevis i (a) om Ω inte är en enkel sammanhängande mängd?

(6) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som är definierad enligt formeln

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (6yz^2 - 3y^2)\mathbf{j} + (z^2 + 6y^2 z)\mathbf{k}.$$

Avgör med bevis om $\mathbf{F}$ är ett potentialfält eller inte.

Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av:

$$\nabla\Phi(u,v,w) = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(A_u h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(A_v h_u h_w\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(A_w h_u h_v\right)\right]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

För cylinderkoordinater: med $(u,v,w) = (\rho,\phi,z)$ har vi:

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1.$$

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \\
\hat{z} &= \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.
\end{aligned}$$

För sfäriska koordinater: med $(u,v,w) = (r,\theta,\phi)$ har vi:

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r\sin\theta.$$

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\
\hat{\theta} &= \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.
\end{aligned}$$

Vektorformler

(1) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$

(2) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$

(3) $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$

(4) $\nabla\cdot(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla\cdot\mathbf{A} + \beta\nabla\cdot\mathbf{B}$

(5) $\nabla\times(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla\times\mathbf{A} + \beta\nabla\times\mathbf{B}$

(6) $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$

(7) $\nabla\cdot(\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi)\cdot\mathbf{A} + \Phi(\nabla\cdot\mathbf{A})$

(8) $\nabla\times(\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi)\times\mathbf{A} + \Phi(\nabla\times\mathbf{A})$

(9) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(10) $\nabla\cdot(\nabla\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater

(11) $\nabla\times(\nabla\Phi) = 0$ för alla Φ

(12) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter α, β, alla deriverbara skalärfält Φ, Ψ och alla deriverbara vektorfält $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.