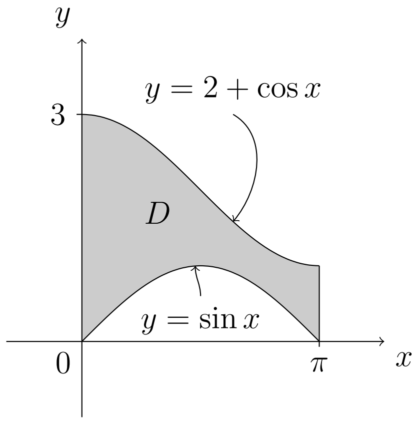
**Instruktioner:** Svara på alla uppgifter. Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. För betyget $n$, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n-1$ poäng. Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys.* Ingen räknadosa tillåten. Lycka till!

(1) Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F}(x,y) = e^x\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ och $\gamma$ är randkurvan till området $D$ i figuren nedan orienterad moturs.




(2) Beräkna arean av en ellips i planet med storradie $a$ och lillradie $b$. Det vill säga beräkna arean av mängden i $xy$-planet som bildas av punkterna $(x, y)$ som uppfyller olikheten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

(3) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x\sqrt{x^2+y^2}, y\sqrt{x^2+y^2}, 0\right)$$

ut genom begränsningsytan till volymen

$$V = \{(x,y,z) \colon x^2 + y^2 \leq 4, |z| \leq 1, y > 0\}.$$

(4) Avgör med bevis om följande vektorfält definierad i hela $xyz$-rummet är potentialfält eller inte.

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, z^2, z^2 + y + x)$

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = f(\rho)\mathbf{e}_\rho$

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = \rho^3 \mathbf{e}_\phi$

Här är $f$ en kontinuerligt deriverbart funktion.

(5) Betrakta funktionen $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{y+z}\mathbf{e}_z$ och randen (eller begränsningsytan) $S = \partial V$ till volymen

$$V = \{(x, y, z)\colon 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 4, 0 \le z \le 5\}.$$

Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom $S$ där $S$ är orienterad så att normalen $\mathbf{n}$ pekar ut från $V$.

(6) Betrakta ytan $S = \{(x, y, z)\colon y = 10 - x^2 - z^2, y \ge 1\}$ orienterad så att enhets normalen $\hat{\mathbf{n}}$ har en positiv $y$-komponent. Beräkna

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$$

där

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + 5z, e^x \cos(yz), x^2 y).$$

# Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av:

$$\nabla\Phi(u,v,w) = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(A_u h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(A_v h_u h_w\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(A_w h_u h_v\right)\right]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

**För cylinderkoordinater:** med $(u,v,w) = (\rho,\phi,z)$ har vi:

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1.$$

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \\
\hat{z} &= \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.
\end{aligned}$$

**För sfäriska koordinater:** med $(u,v,w) = (r,\theta,\phi)$ har vi:

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r\sin\theta.$$

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\
\hat{\theta} &= \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.
\end{aligned}$$

# Vektorformler

(1) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

(2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

(3) $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$

(4) $\nabla \cdot (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \cdot \mathbf{A} + \beta\nabla \cdot \mathbf{B}$

(5) $\nabla \times (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \times \mathbf{A} + \beta\nabla \times \mathbf{B}$

(6) $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$

(7) $\nabla \cdot (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \mathbf{A} + \Phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$

(8) $\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$

(9) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(10) $\nabla \cdot (\nabla\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater

(11) $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$ för alla $\Phi$

(12) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter $\alpha$, $\beta$, alla deriverbara skalärfält $\Phi$, $\Psi$ och alla deriverbara vektorfält $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.