

Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. För betyget n , $n = 3, 4, 5$, krävs $3n - 1$ poäng. Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknadosa tillåten. Lycka till!

- (1) (a) Identifiera vilken eller vilka av följande funktioner är vektorfält och vilken eller vilka är skalärfält:
- (i) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
 - (ii) $g(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$; och
 - (iii) $h(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2}(\sin x, \tan y + e^z, xyz)$.
- (b) Ge ett exempel av en fysikalisk storhet som kan representeras av ett vektorfält.
- (c) En kurva parametreras av funktionen $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Ge en tangentvektor till kurvan i punkten $(1, 0, 2\pi)$.

- (2) Betrakta ytan $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ och låt $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vara ett vektorfält som ges av formeln

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-e^x \cos y, e^x \sin y, z^6)$$

för alla $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Beräkna flödet av \mathbf{F} genom S orienterad med en normal som pekar bort från origo.

- (3) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x\sqrt{x^2 + y^2}, y\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$$

ut genom begränsningsytan till volymen

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, |z| \leq 1, y > 0\}.$$

- (4) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(\rho, \phi, z) = \rho^n \mathbf{e}_\rho$ (som ges i cylindriska koordinater) för $\rho > 0$ och ett heltal n .
- (a) Beräkna $\operatorname{div} \mathbf{F}$.
 - (b) Beräkna $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F}$.
 - (c) För vilka n löser \mathbf{F} ekvationen $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} = \mathbf{0}$?

(5) Betrakta vektorfältet

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

och skalärfältet

$$\phi(x, y, z) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

(a) Beräkna rotationen av \mathbf{A} .

(b) Är \mathbf{A} ett potentialfält med potential ϕ ?

(6) Beräkna kurvintegralen $\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

och Γ är skärningskurvan mellan planet $x + 2y + 3z = 10$ och cylindern $x^2 + y^2 = 2$. Kurvan genomlöps moturs sett från punkten $(0, 0, 17)$. Motivera noga!

Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av:

$$\nabla\Phi(u, v, w) = \hat{u} \frac{1}{h_u} \frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v} \frac{1}{h_v} \frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w} \frac{1}{h_w} \frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u \hat{u} + A_v \hat{v} + A_w \hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (A_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (A_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w} (A_w h_u h_v) \right]$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

För cylinderkoordinater: med $(u, v, w) = (\rho, \phi, z)$ har vi:

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1.$$

$$\mathbf{r}(\rho, \phi, z) = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}.$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$$

$$\hat{z} = \frac{1}{h_z} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.$$

För sfäriska koordinater: med $(u, v, w) = (r, \theta, \phi)$ har vi:

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r \sin \theta.$$

$$\mathbf{r}(r, \theta, \phi) = r \hat{r}.$$

$$\hat{r} = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}.$$

Vektorformler

$$(1) \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

$$(2) \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$(3) \nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$$

$$(4) \nabla \cdot (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \cdot \mathbf{A} + \beta\nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$(5) \nabla \times (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \times \mathbf{A} + \beta\nabla \times \mathbf{B}$$

$$(6) \nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$$

$$(7) \nabla \cdot (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \mathbf{A} + \Phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$(8) \nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$$

$$(9) \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$(10) \nabla \cdot (\nabla\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \text{ i kartesiska koordinater}$$

$$(11) \nabla \times (\nabla\Phi) = 0 \text{ f\u00f6r alla } \Phi$$

$$(12) \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Dessa formler g\u00e4ller f\u00f6r alla konstanter α , β , alla deriverbara skal\u00e4rf\u00e4lt Φ , Ψ och alla deriverbara vektorf\u00e4lt \mathbf{A} , \mathbf{B} .