Instruktioner: Svara på alla uppgifter. Varje uppgift kan ge 0, 1, 2 eller 3 poäng. För betyget n, $n = 3, 4, 5$, krävs $3n-1$ poäng. Tillåtet hjälpmedel: *Formelbladet i vektoranalys*. Ingen räknadosa tillåten. Lycka till!

(1) Betrakta ytan $S = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\}$ som är orienterad med en normal som pekar nedåt. Bekräfta att Stokes sats gäller för vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - z, x + y^2 - z, 4y - 3x).$$

och ytan S genom att beräkna båda integraler i satsen.

(2) Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför planet $z = 0$.

(3) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A}(x, y, z) = (9xz^2, yx^2, 4zy^2)$ ut genom ytan

$$S = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 4, z \geq 0\}$$

där i varje punkt på S väljer man den enhetsnormal $\hat{n}$ som lyder $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

(4) Beräkna kurintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (xz, xy^2 + 2z, xy + z)$$

och Γ är kurvan $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ med

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1\colon x = 0, y^2 + z^2 = 1, z > 0, y\colon -1 \to 1;\\
&\Gamma_2\colon z = 0, x + y = 1, y\colon 1 \to 0; \quad \text{och}\\
&\Gamma_3\colon z = 0, x - y = 1, y\colon 0 \to -1.
\end{aligned}$$

(5) Betrakta följande två parametriseringar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(s, t) &= (s\cos t, s\sin t, 3s^2) \quad \text{för } 0 \leq s \leq 2 \text{ och } 0 \leq t \leq 2\pi;\\
\mathbf{v}(s, t) &= (2s\cos t, 2s\sin t, 12s^2) \quad \text{för } 0 \leq s \leq 1 \text{ och } 0 \leq t \leq 4\pi.
\end{aligned}$$

(a) Beskriv ytan som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ parametriserar som en ekvation i kartesiska koordinater (x, y och z).

(b) Beräkna

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{u}(s,t)) \cdot \mathbf{u}'_s \times \mathbf{u}'_t \, dsdt \quad \text{och}$$
$$\int_0^{4\pi}\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{v}(s,t)) \cdot \mathbf{v}'_s \times \mathbf{v}'_t \, dsdt,$$

där $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)$, och förklara resultaten.

(6) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som är definierad enligt formeln

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin(yz), zx\cos(yz) + 3y^2, xy\cos(yz)).$$

(a) Vad menar vi när vi säger ett vektorfält är ett *potentialfält*?

(b) Visa att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält.

Sammanfattning av formler för kroklinjiga koordinater

Gradienten ges av:

$$\nabla\Phi(u,v,w) = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

För vektorfältet $\mathbf{A} = A_u\hat{u} + A_v\hat{v} + A_w\hat{w}$ har vi följande formler:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(A_u h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(A_v h_u h_w\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(A_w h_u h_v\right)\right]$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

För cylinderkoordinater: med $(u,v,w) = (\rho,\phi,z)$ har vi:

$$h_u = h_\rho = 1, \quad h_v = h_\phi = \rho, \quad h_w = h_z = 1.$$

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \frac{1}{h_\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \\
\hat{z} &= \frac{1}{h_z}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \hat{z}.
\end{aligned}$$

För sfäriska koordinater: med $(u,v,w) = (r,\theta,\phi)$ har vi:

$$h_u = h_r = 1, \quad h_v = h_\theta = r, \quad h_w = h_\phi = r\sin\theta.$$

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\,\hat{r}.$$

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \\
\hat{\theta} &= \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\
\hat{\phi} &= \frac{1}{h_\phi}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}.
\end{aligned}$$

Vektorformler

(1) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

(2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

(3) $\nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha\nabla\Phi + \beta\nabla\Psi$

(4) $\nabla \cdot (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \cdot \mathbf{A} + \beta\nabla \cdot \mathbf{B}$

(5) $\nabla \times (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\nabla \times \mathbf{A} + \beta\nabla \times \mathbf{B}$

(6) $\nabla(\Phi\Psi) = (\nabla\Phi)\Psi + \Phi(\nabla\Psi)$

(7) $\nabla \cdot (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \mathbf{A} + \Phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$

(8) $\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$

(9) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(10) $\nabla \cdot (\nabla\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ i kartesiska koordinater

(11) $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$ för alla Φ

(12) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

Dessa formler gäller för alla konstanter α, β, alla deriverbara skalärfält Φ, Ψ och alla deriverbara vektorfält $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.