TATA44/TEN1 **Tentamen, 2023-08-23**

Vektoranalys

1. Betrakta ytan $S = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0\}$ som är orienterad med en normal som pekar nedåt. Bekräfta att Stokes sats gäller för vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - z, x + y^2 - z, 4y - 3x).$$

och ytan S genom att beräkna båda integraler i satsen.

Lösning: Låt γ vara randkurvan till S och parametriserar den med $\gamma(t) = (\cos t, -\sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Vi beräknar först

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\sin t, \cos t + \sin^2 t, -4\sin t - 3\cos t) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2\sin^2 t - \cos^2 t - \sin^2 t \cos t\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1 - 3\cos(2t)}{2} - \sin^2 t \cos t\, dt \\
&= \left[\frac{2t - 3\sin(2t)}{4} - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = \pi.
\end{aligned}$$

Sedan kan vi också beräkna att

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = (5, 2, -1)$$

och parametrisera S med $\mathbf{u}(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\theta)$ $(0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2)$. Därför är

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (5, 2, -1) \cdot (\sin^2\theta\cos\phi, -\sin^2\theta\sin\phi, -\cos\theta\sin\theta)\, d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 5\sin^2\theta\cos\phi - 2\sin^2\theta\sin\phi + \cos\theta\sin\theta\, d\phi d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\, d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\phi d\theta = \left[\frac{-\pi\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi.
\end{aligned}$$

Därför har vi bekräftat att

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

i det här fallet.

2.

Beräkna arean av den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför planet $z = 0$.

Lösning:

Vi betecknar den del av paraboloiden som ligger ovanför konen med S, och S får parametriseras av ortsvektorn $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ där $(x, y) \in D$ och $D = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$. Den sökta arean är nu

$$\begin{aligned}
A &= \iint_S dS \\
&= \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy \\
&= [x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi] \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\rho^2} d\phi \right) \rho d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho d\rho \\
&= [u = 1 + 4\rho^2] \\
&= \frac{\pi}{4} \int_1^5 u^{1/2} du \\
&= \frac{\pi}{6}[5\sqrt{5} - 1].
\end{aligned}$$

3.

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A}(x, y, z) = (9xz^2, yx^2, 4zy^2)$ ut genom ytan

$$S = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 4, z \geq 0\}$$

där i varje punkt på S väljer man den enhetsnormal $\hat{n}$ som lyder $\hat{n} \cdot \hat{z} > 0$.

Lösning:

En standardräkning ger att $\nabla \cdot \mathbf{A} = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Lägg till ytan $S_1 = \{(x, y, z) \colon x^2 + 4y^2 \leq 4,\ z = 0\}$. Ytorna $S \cup S_1$ avgränsar en kropp $V = \{(x, y, z) \colon x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$. Flödet av $\mathbf{A}$ ut ur V genom S är

$$\Phi = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS$$

Enligt Gauss Sats har vi

$$\iint_{S \cup S_1} \mathbf{A} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V (x^2 + 4y^2 + 9z^2) dxdydz.$$

På S_1 är $z = 0$ och $\hat{n} = -\hat{z}$ och då är $\mathbf{A} \cdot \hat{n} = 4zy^2 = 0$ på S_1, vilket nu ger att

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iiint_V (x^2 + 4y^2 + 9z^2) dxdydz \\
&= [x = r\cos\phi \sin\theta,\ y = \frac{r}{2}\sin\phi\sin\theta,\ z = \frac{r}{3}\cos\theta,\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \phi \le 2\pi] \\
&= \frac{1}{6}\int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin\theta \, d\phi \right) d\theta \right) dr \\
&= \frac{32\pi}{15}.
\end{aligned}
$$

4.

Beräkna kurintegralen $\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (xz, xy^2 + 2z, xy + z)$$

och Γ är kurvan $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ med

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_1 \colon x = 0, y^2 + z^2 = 1, z > 0, y \colon -1 \to 1; \\
&\Gamma_2 \colon z = 0, x + y = 1, y \colon 1 \to 0; \quad \text{och} \\
&\Gamma_3 \colon z = 0, x - y = 1, y \colon 0 \to -1.
\end{aligned}
$$

Lösning:

Vi har

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

För Γ_1 tar vi ortsvektorn $\mathbf{r}(\theta) = (0, \cos\theta, \sin\theta)$ med $\theta : \pi \to 0$ så $y : -1 \to 1$. Då har vi att

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_\pi^0 (0, 2\sin\theta, \sin\theta) \cdot \mathbf{r}'(\theta) d\theta \\
&= \int_\pi^0 (0, 2\sin\theta, \sin\theta) \cdot (0, -\sin\theta, \cos\theta) d\theta \\
&= \int_\pi^0 [\cos\theta\sin\theta - 2\sin^2\theta] d\theta \\
&= \int_\pi^0 [\cos 2\theta - 1] d\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

För Γ_2 ortsvektorn är $\mathbf{r}(y) = (1 - y, y, 0)$ och $y : 1 \to 0$ som ger

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^0 (0, y^2(1-y), y(1-y)) \cdot \mathbf{r}'(y) dy \\
&= \int_1^0 (0, y^2(1-y), y(1-y)) \cdot (-1, 1, 0) dy \\
&= \int_1^0 y^2(1-y) dy \\
&= -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

För Γ_3 ortsvektorn är $\mathbf{r}(y) = (1+y, y, 0)$ och $y : 0 \to -1$ som ger

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{-1} (0, y^2(1+y), y(1+y)) \cdot \mathbf{r}'(y) dy \\
&= \int_0^{-1} (0, y^2(1+y), y(1+y)) \cdot (1, 1, 0) dy \\
&= \int_0^{-1} y^2(1+y) dy \\
&= -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Vi får

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \pi - \frac{1}{6}.$$

---

5. Betrakta följande två parametriseringar:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}(s,t) = (s\cos t, s\sin t, 3s^2) \quad \text{för } 0 \le s \le 2 \text{ och } 0 \le t \le 2\pi; \\
&\mathbf{v}(s,t) = (2s\cos t, 2s\sin t, 12s^2) \quad \text{för } 0 \le s \le 1 \text{ och } 0 \le t \le 4\pi.
\end{aligned}$$

(a) Beskriv ytan som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ parametriserar som en ekvation i kartesiska koordinater (x, y och z).

(b) Beräkna

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{u}(s,t)) \cdot \mathbf{u}'_s \times \mathbf{u}'_t \, ds dt \quad \text{och}$$
$$\int_0^{4\pi} \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{v}(s,t)) \cdot \mathbf{v}'_s \times \mathbf{v}'_t \, ds dt,$$

där $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, z^2)$, och förklara resultaten.

Lösning:

(a) För $\mathbf{u}$ ser vi att

$$x^2 + y^2 = (s\cos t)^2 + (s\sin t)^2 = s^2 = \frac{z}{3}$$

och gränserna motsvarar $x^2 + y^2 \leq 4$.

För $\mathbf{v}$ ser vi att

$$x^2 + y^2 = (2s\cos t)^2 + (2s\sin t)^2 = 4s^2 = \frac{z}{3}$$

och gränserna motsvarar $x^2 + y^2 \leq 4$.

Därmed parametriserar $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samma ytan.

(b) Vi beräknar

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'_s \times \mathbf{u}'_t &= (\cos t, \sin t, 6s) \times (-s\sin t, s\cos t, 0)\\ &= (-6s^2\cos t, -6s^2\sin t, s)\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{u}(s,t)) \cdot \mathbf{u}'_s \times \mathbf{u}'_t dsdt &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (s\sin t, -s\cos t, 9s^4) \cdot (-6s^2\cos t, -6s^2\sin t, s) dsdt\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 9s^5 dsdt = \left[\frac{18\pi s^6}{6}\right]_0^2 = 192\pi.\end{aligned}$$

Vad gäller $\mathbf{v}$ kan vi beräkna att

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_s \times \mathbf{v}'_t &= (2\cos t, 2\sin t, 24s) \times (-2s\sin t, 2s\cos t, 0)\\ &= (-48s^2\cos t, -48s^2\sin t, 4s)\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}\int_0^{4\pi}\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{v}(s,t)) \cdot \mathbf{v}'_s \times \mathbf{v}'_t dsdt &= \int_0^{4\pi}\int_0^1 (2s\sin t, -2s\cos t, 144s^4) \cdot (-48s^2\cos t, -48s^2\sin t, 4s) dsdt\\ &= \int_0^{4\pi}\int_0^1 576s^5 dsdt = \left[\frac{2304\pi s^6}{6}\right]_0^1 = 384\pi.\end{aligned}$$

Andra integralen är två gånger första integralen eftersom $\mathbf{v}$ täcker ytan två gånger och $\mathbf{u}$ bara täcker den en gång.

6.

Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som är definierad enligt formeln

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin(yz), zx\cos(yz) + 3y^2, xy\cos(yz)).$$

(a) Vad menar vi när vi säger ett vektorfält är ett *potentialfält*?

(b) Visa att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält.

Lösning:

(a) Vi menar att det finns en skalärfunktion ϕ (med samma definitionsmängd som $\mathbf{F}$) sådan att $\nabla\phi = \mathbf{F}$.

(b) Eftersom $\mathbf{R}^3$ är enkel sammanhängande duggar det att kontrollera rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Vi räknar att

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin(yz) & zx\cos(yz) + 3y^2 & xy\cos(yz) \end{vmatrix}. \\
&= (x\cos(yz) - xyz\sin(yz) - x\cos(yz) + xyz\sin(yz))\mathbf{i} \\
&\quad + (y\cos(yz) - y\cos(yz))\mathbf{j} + (z\cos(yz) - z\cos(yz)\mathbf{k} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

så $\mathbf{F}$ är ett potentialfält.
